

Einführung in die Programmierung

Wintersemester 2020/21

Kapitel 7: Rekursion

M.Sc. Roman Kalkreuth

Lehrstuhl für Algorithm Engineering (LS11)

Fakultät für Informatik

Inhalt

- Rekursion: Technik
- Rekursion vs. Iteration

Definition (einfache, erste Version)

Rekursives Programm := Programm, das sich selbst aufruft

Rekursive Funktion := Funktion, die sich selbst aufruft

offensichtlich:

Es muss eine **Abbruchbedingung** geben ...

gibt an, wann
Programm / Funktion
aufhören soll, sich
selbst aufzurufen

- ⇒ sonst unendliche Rekursion
- ⇒ entspricht einer Endlosschleife



Arbeitsprinzip:

rekursiver Algorithmus löst Problem durch Lösung mehrerer **kleinerer Instanzen des gleichen Problems**

⇒ Zerlegung des Problems in kleinere Probleme gleicher Art

Rekursionsprinzip schon lange bekannt (> 2000 Jahre)

- zunächst in der Mathematik (z.B. Euklid)
- in der Informatik verwendet als fundamentale Technik beim Algorithmenentwurf
 - z.B. „**teile und herrsche**“-Methode (*divide and conquer*)
 - z.B. Backtracking

Thematik zu inhaltsschwer für eine 2-stündige Vorlesung → hier: nur erster Einstieg

Rekursion in der Mathematik

Beispiel: **Fakultät**

$f(0) = 1$ Rekursionsverankerung

$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = n * f(n - 1)$ Rekursionsschritt

Beispiel: Rekursive Definition **logischer Ausdrücke**

1. Wenn **v** logische Variable (**true**, **false**),
dann **v** und **NOT v** logischer Ausdruck.
2. Wenn **a** und **b** logische Ausdrücke,
dann **a AND b** sowie **a OR b** logische Ausdrücke.
3. Alle logischen Ausdrücke werden mit 1. und 2. aufgebaut.

Rekursion in der Informatik

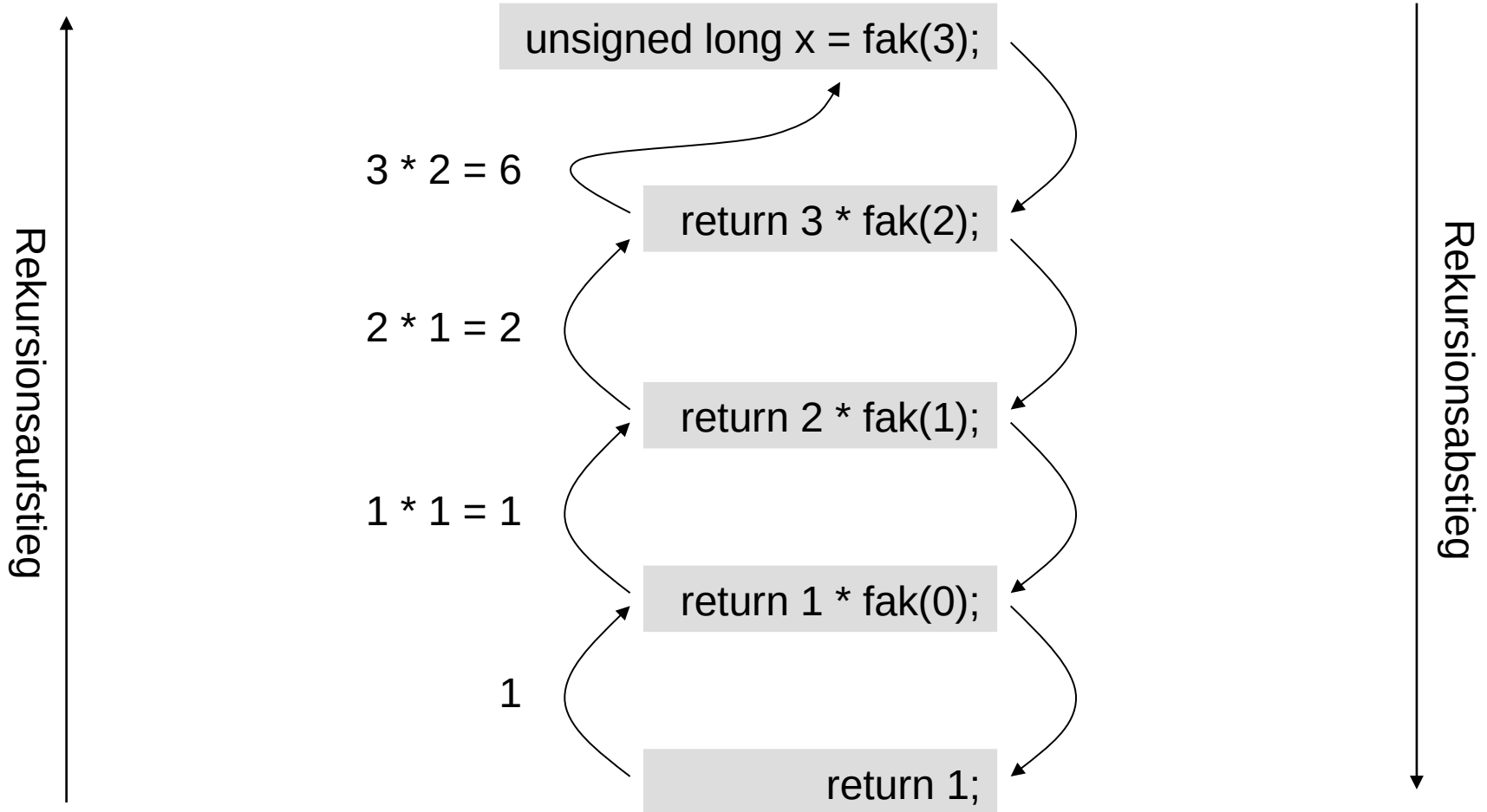
Beispiel: **Fakultät**

$f(0) = 1$ Rekursionsverankerung

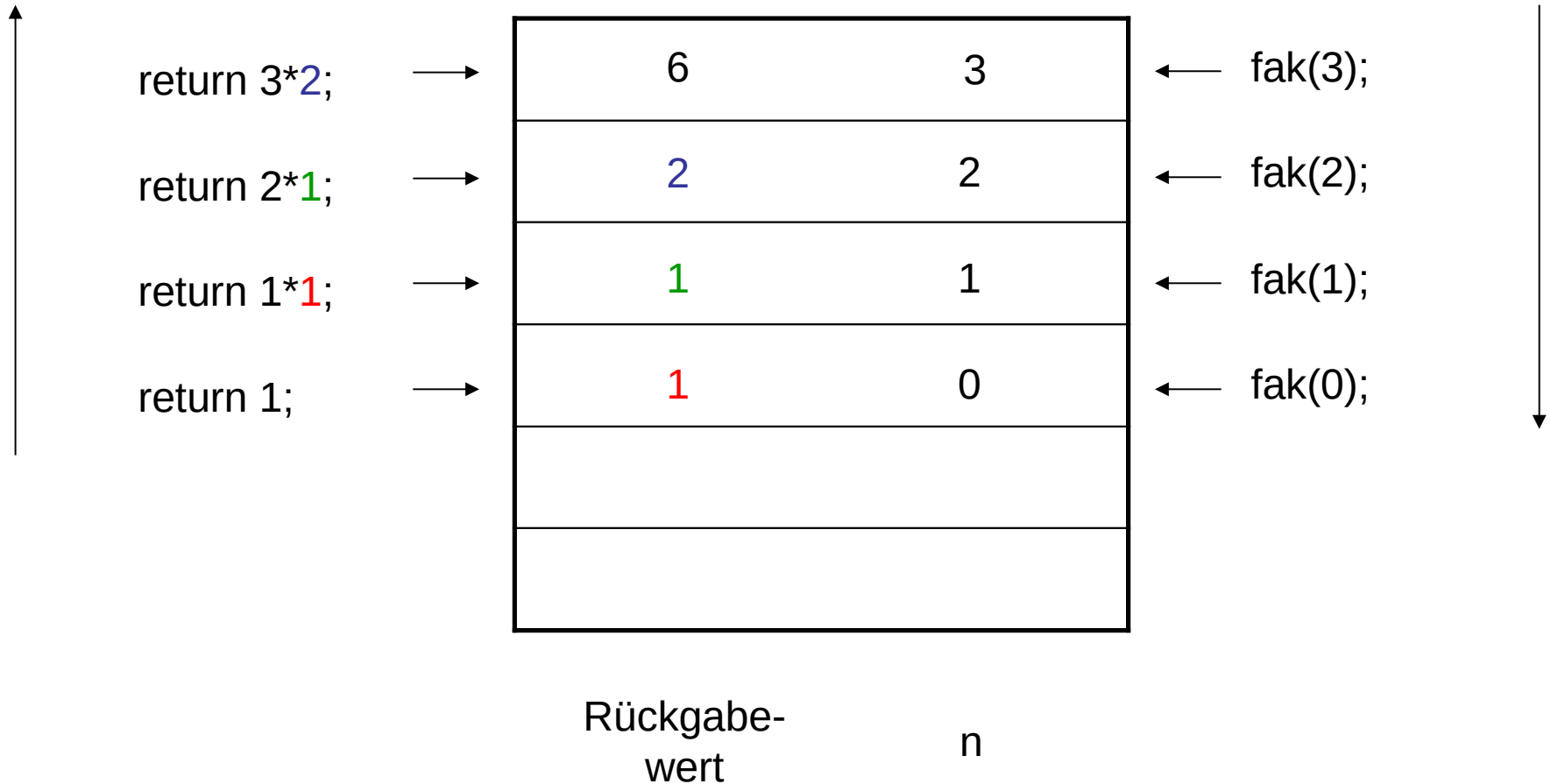
$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = n * f(n - 1)$ Rekursionsschritt

```
unsigned long fak(unsigned int n) {  
    if (n == 0) return 1;    // Rekursionsverankerung  
    return n * fak(n - 1);  // Rekursionsschritt  
}
```

⇒ **Rekursionsverankerung** verhindert endlose Rekursion



Ablagefächer (Stack)




```
unsigned long fak(unsigned int n) {  
    if (n == 0) return 1;    // Rekursionsverankerung  
    return n * fak(n - 1);  // Rekursionsschritt  
}
```

Beobachtung:

1. Der **Basisfall** des Problems muss **direkt lösbar sein** (Rekursionsverankerung).
2. Bei jedem rekursiven Aufruf müssen **kleinere Problemgrößen** übergeben werden.

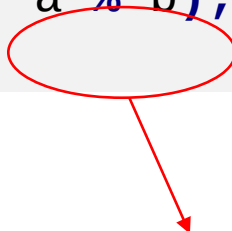
Weiteres Beispiel:

Bestimme den **größten gemeinsamen Teiler** (ggT) zweier Zahlen

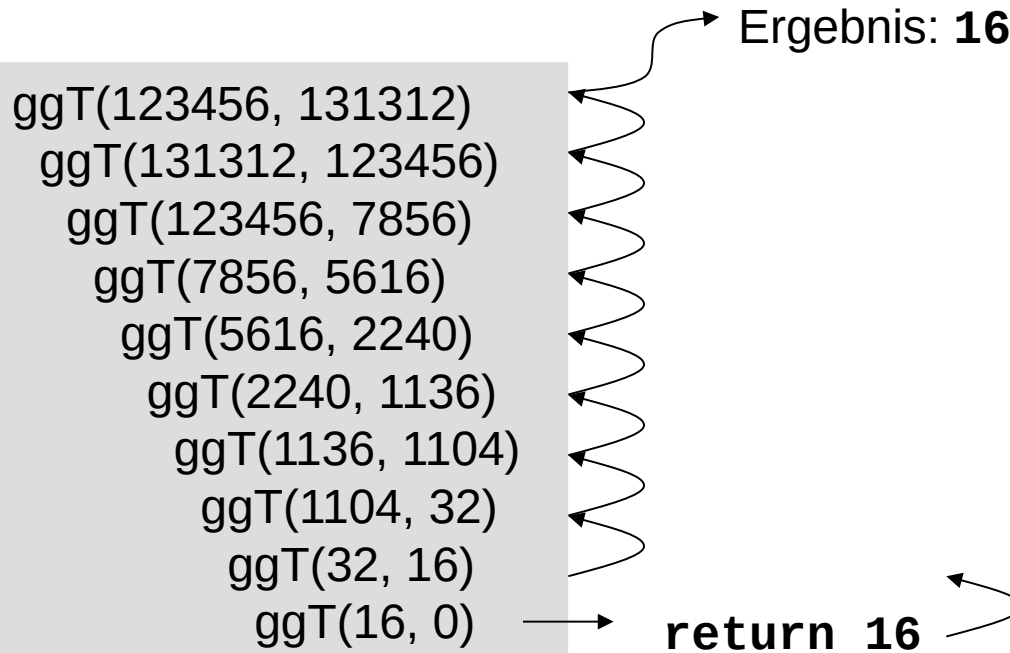
⇒ Euklidischer Algorithmus (> 2000 Jahre)

in C++:

```
unsigned int ggT(unsigned int a, unsigned int b) {  
    if (b == 0) return a; // Rekursionsverankerung  
    return ggT(b, a % b); // Rekursionsschritt  
}
```



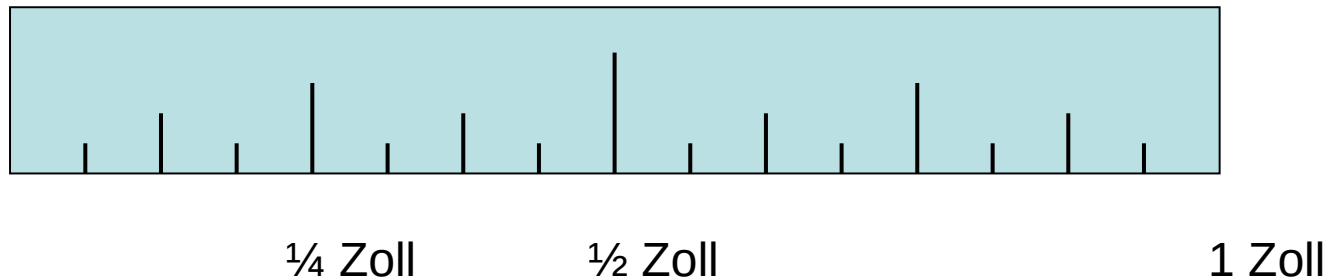
Verkleinerung des Problems



Abbruchbedingung!

Noch ein Beispiel:

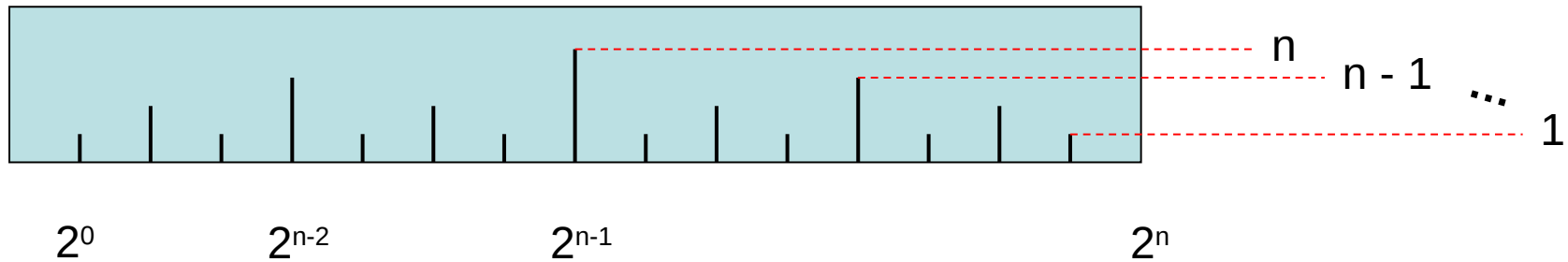
Zeichne Maßstriche auf ein (amerikanisches) Lineal



- Marke bei $\frac{1}{2}$ Zoll
- kleinere Marke bei je $\frac{1}{4}$ Zoll
- noch kleinere Marke bei je $\frac{1}{8}$ Zoll
- u.s.w. immer kleinere Marken bei je $\frac{1}{2^n}$

Annahme: Auflösung soll $1/2^n$ für gegebenes n sein

⇒ Maßstabsänderung:



Idee:

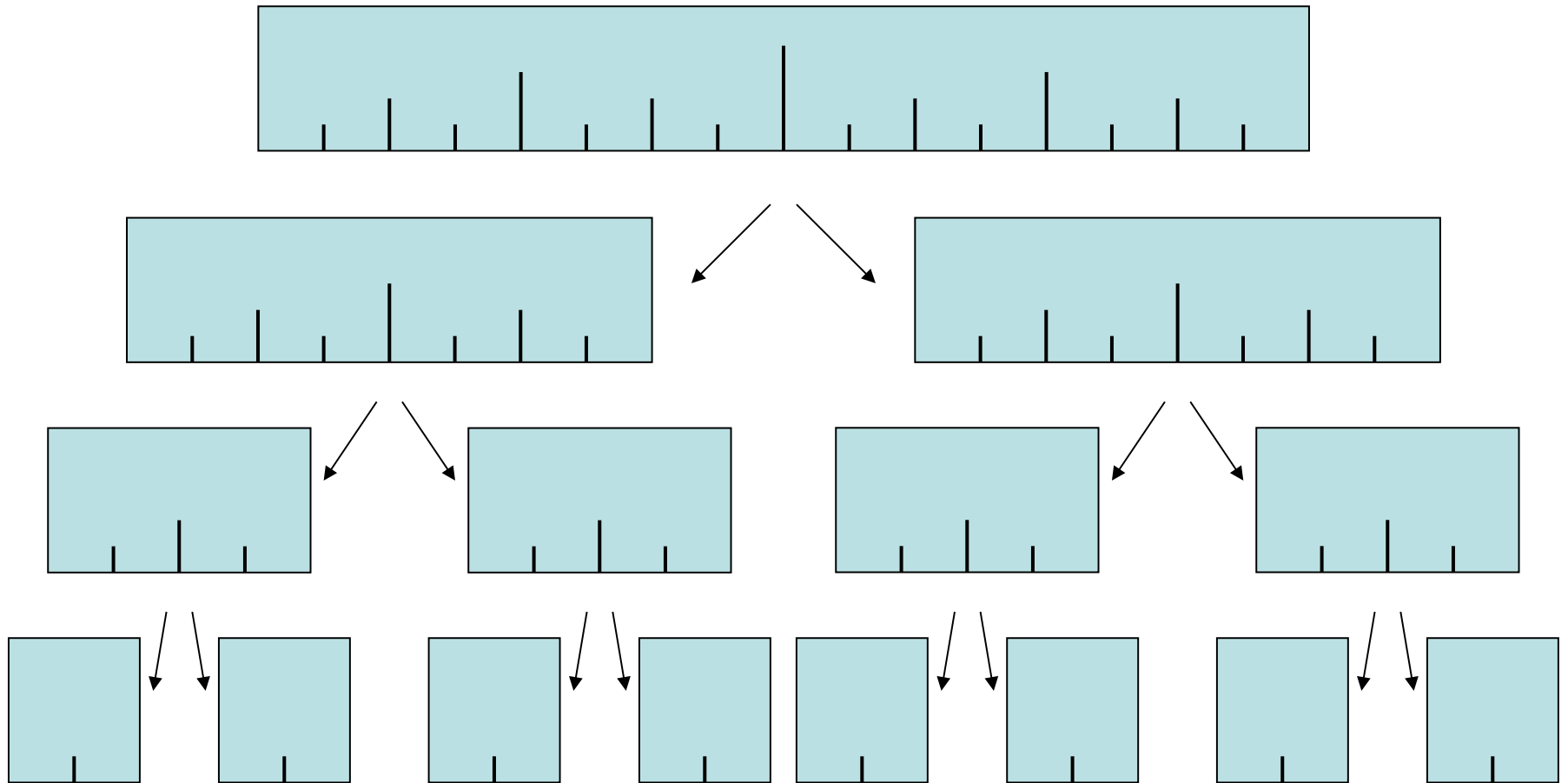
Teile Intervall in 2 gleich große Hälften,

zeichne linkes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

erzeuge längere Marke in der Mitte

zeichne rechtes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

Illustration:



Also:

Zeichnen des Lineals wird so lange auf kleinere Probleme / Lineale vereinfacht, bis wir das elementare Problem / Lineal lösen können:

„Zeichne eine Marke der Höhe 1“

Jetzt: Rekursionsaufstieg

linkes (elementares) Lineal zeichnen

zeichne Marke der Höhe h ($= 2$)

rechtes (elementares) Lineal zeichnen

} ⇒ Teilproblem gelöst!

Implementierung

Welche Parameter spielen eine Rolle?

linker Rand des Teil-Lineals	→ li
rechter Rand des Teil-Lineals	→ re
Höhe der Marke	→ h
Mitte des Teil-Lineals (für die Marke)	→ mi

```
void lineal(unsigned int li, unsigned int re, unsigned int h) {  
    unsigned int mi = (li + re) / 2;  
    if (h > 0) {  
        lineal(li, mi, h - 1);  
        marke(mi, h);  
        lineal(mi, re, h - 1);  
    }  
}
```


Implementierung

Zeichnen der Marken (mehrere Möglichkeiten)

hier: wir wissen, dass Marken von links nach rechts gezeichnet werden
⇒ Testausgabe mit senkrechtem Lineal (Marken von oben nach unten)

```
void marke(unsigned int position, unsigned int hoehe) {  
    while (hoehe-- > 0) cout << '-';  
    cout << endl;  
}
```

Anmerkung:

position wird hier nicht gebraucht, aber andere Situationen vorstellbar

Implementierung


Hauptprogramm zum Testen:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(int argc, char *argv[]) {
    if (argc != 2) {
        cerr << "usage: " << argv[0] << ": n" << endl;
        return 1;
    }
    unsigned int n = atoi(argv[1]);

    lineal(0, 1 << n, n);

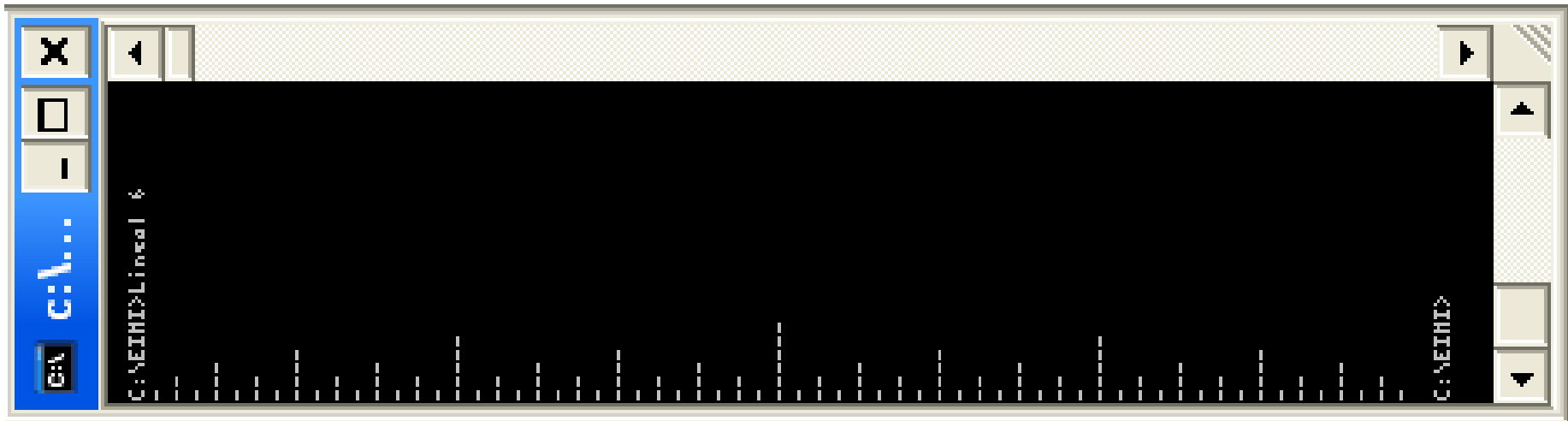
    return 0;
}
```



<< im numerischen Ausdruck: $x \ll n$
schiebt Bitmuster von x um n Bits nach links.

Was bedeutet $x \gg n$?

Lineal mit $2^6 = 64$ Marken:



Rekursion vs. Iteration

Theorem:

Jeder iterative Algorithmus lässt sich rekursiv formulieren und umgekehrt!

Wofür also das alles?

- ⇒ Manche Probleme lassen sich mit Rekursion sehr **elegant** und **einfach** lösen.
- ⇒ Lösung durch Iteration kann komplizierter sein!

Andererseits:

- ⇒ Nicht jedes Problem lässt sich durch Rekursion **effizient** lösen.
- ⇒ Iterative Lösung kann viel effizienter (auch einfacher) sein.

Rekursion vs. Iteration

beide einfach,
aber nicht gleich effizient

Iterative Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {  
    unsigned int wert = 1;  
    while (n > 0) wert *= n--;  
    return wert;  
}
```

1 Funktionsaufruf
1 Ablagefach
2 lokale Variable

Rekursive Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {  
    if (n == 0) return 1;  
    return n * fak(n - 1);  
}
```

n Funktionsaufrufe
n Ablagefächer
n lokale Variable

Rekursion vs. Iteration

```
void lineal(unsigned int li, unsigned int re, unsigned int h) {  
    for (int t = 1, j = 1; t <= h; j += j, t++)  
        for (int i = 0; li + j + i <= re; i += j + j)  
            marke(li + j + i, t);  
}
```

Zeichnet erst alle Marken der Höhe 1, dann 2, usw. mit Auslassungen

```
void lineal(unsigned int li, unsigned int re, unsigned int h) {  
    unsigned int mi = (li + re) / 2;  
    if (h > 0) {  
        lineal(li, mi, h - 1);  
        marke(mi, h);  
        lineal(mi, re, h - 1);  
    }  
}
```

Rekursion vs. Iteration

Zur einfachen **Übertragung** rekursiver Algorithmen in iterative äquivalente Form benötigen wir spezielle Datenstrukturen (**stack**).

Diese und einige andere werden in späterem Kapitel eingeführt.

⇒ **Elementare Datenstrukturen**

Intervallschachtelung

Bestimme Nullstelle einer streng monotonen Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Annahme: $f(a) \cdot f(b) < 0$, also haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen.

```
double nullstelle(double a, double b) {  
    double const eps = 1.0e-10;  
    double fa = f(a), fb = f(b);  
    double c = (a + b) / 2., fc = f(c);  
    if (fabs(fa - fb) < eps) return c;  
    return (fa < 0 && fc < 0 || fa > 0 && fc > 0) ?  
        nullstelle(c, b) : nullstelle(a, c);  
}
```

