

n	Anzahl der Ungleichungen
3	8
4	20
5	40
6	910
7	87.472
8	>488.602.996

Tabelle 3.1: Anzahl der Ungleichungen des LOP-Polytops für  $n \leq 8$ 

### 3.4 Exakte Verfahren für (Gemischt-) Ganzzahlige Optimierung

Dieser Abschnitt diskutiert die erfolgreichsten exakten Lösungstechniken für viele NP-schwierige kombinatorische Optimierungsprobleme und (gemischt-) ganzzahlige Optimierungsprobleme: Schnittebenenverfahren und deren Kombination mit Branch-and-Bound Verfahren, nämlich Branch-and-Cut Verfahren. Die Verfahren haben gemeinsam, dass sie (gemischt-) ganzzahlige Optimierungsprobleme mit Hilfe von linearer Programmierung lösen.

Abbildung 3.10 zeigt den Zulässigkeitsbereich eines ganzzahligen linearen Programms (die schwarzen Punkte). Wenn wir nun die Ganzzahligkeitsbedingungen weglassen, erhalten wir die sogenannte *LP-Relaxierung* des ILPs. Diese definiert ein Polyeder (hier ist dies ein Polytop). Die optimale Lösung der LP-Relaxierung wird an einer Ecke des dazugehörigen Polytops angenommen. Im allgemeinen ist diese nicht-ganzzahlig. Um nun zu einer ganzzahligen (also zulässigen) Lösung zu kommen, kann man z.B. runden. Allerdings ist es meist nicht trivial, um durch Runden wieder zu einer zulässigen Lösung zu kommen, die alle Ungleichungen erfüllt.

Abbildung 3.10 zeigt, dass selbst wenn das Runden gelingt, die erreichte Lösung im allgemeinen nicht optimal ist. Die folgenden Abschnitte zeigen, wie man lineare Programmierung systematisch zur exakten Lösung (gemischt-) ganzzahliger Programme benutzen kann.

#### 3.4.1 Branch-and-Bound für Gemischt-Ganzzahlige Optimierung

In diesem Abschnitt geben wir eine Kurzeinführung in *Branch-and-Bound*-Verfahren. Mit Branch-and-Bound bezeichnet man eine allgemeine Klasse von Verfahren, die generell für eine weitere Klasse von Problemen einsetzbar sind. Die prinzipielle Idee ist einfach (wenn nicht gar trivial). Die praktische Umsetzung erfordert allerdings weitergehende

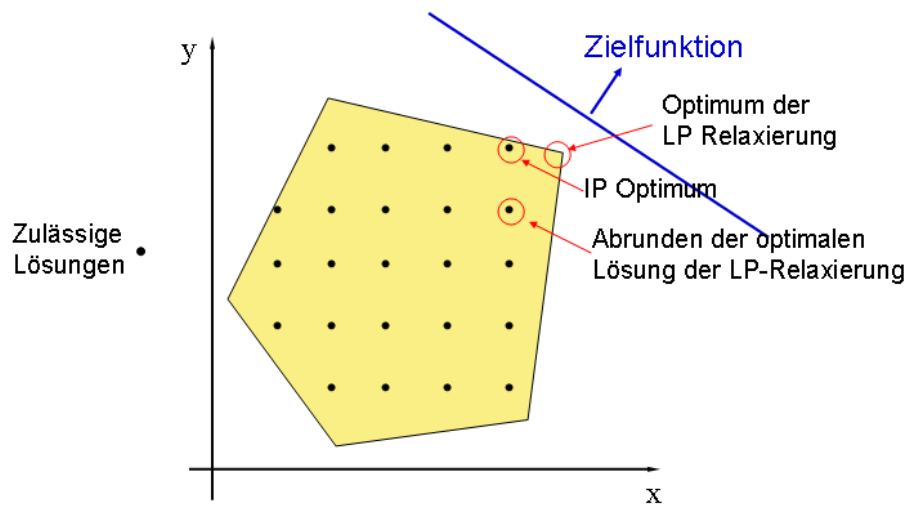


Abbildung 3.10: Ganzzahlige Optimierung

Überlegungen und effiziente Datenstrukturen.

Die Bestandteile eines Branch-and-Bound-Verfahrens sind:

- ein Schema zur Zerlegung eines Problems in Teilprobleme.
- Verfahren zur Berechnung oberer und unterer Schranken.

Wir betrachten im folgenden Maximierungsprobleme.

Das Vorgehen eines Branch-and-Bound-Verfahrens ist das folgende. Man versucht zunächst das gegebene Problem zu lösen. Hierbei liefern Relaxierungen obere Schranken und zulässige Lösungen untere Schranken. Fallen die Schranken zusammen, so ist das Problem (bewiesenermaßen) optimal gelöst. Gelingt dies nicht, so wird das Problem so in Teilprobleme zerlegt, dass die Gesamtheit der Lösungen der Teilprobleme die Lösung des Ausgangsproblems ergibt. Ein solches Teilproblem wird gelöst durch:

- (a) Bestimmen einer optimalen Lösung oder
- (b) Feststellung der Unzulässigkeit oder
- (c) Bestimmung einer oberen Schranke, die nicht besser als die bisher beste gefundene Lösung ist oder
- (d) Zerlegung in weitere Teilprobleme.

Bei endlicher Lösungsmenge unter *vernünftiger* Aufteilungsstrategie ist klar, dass dieses Verfahren zum Ziel führt.

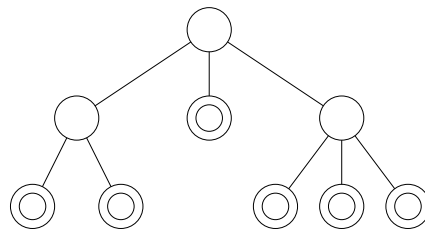


Abbildung 3.11: Illustration eines Branch-and-Bound Baumes

Dem Ablauf des Verfahrens läßt sich in natürlicher Weise der sogenannte *Branch-and-Bound-Baum* zuweisen. Jeder Knoten repräsentiert ein Teilproblem (die Wurzel das Ausgangsproblem) und die direkten Nachfolger eines Knotens entsprechen der Zerlegung des zugehörigen Problems. Die Blätter des Baumes repräsentieren Probleme, die im obigen Sinn (Fall (a) bis (c)) gelöst wurden. Ein Branch-and-Bound-Verfahren ist so organisiert, dass in jedem Schritt folgendes gilt: Eine zulässige Lösung  $S$  gehört entweder zu einem bereits gelösten Teilproblem oder ist zulässige Lösung eines noch nicht bearbeiteten Teilproblems.

Abschließend ist zu sagen, dass man typischerweise bei der Lösung schwieriger ganzzahliger oder kombinatorischer Optimierungsprobleme letztendlich um ein Branch-and-Bound-Verfahren nicht herumkommt. Durch fortgeschrittene Techniken (z.B. mittels Schnittebenenverfahren) zur Behandlung der Teilprobleme kann man die Größe des Baumes drastisch reduzieren und erhebliche Rechenzeiterparnis erzielen.

### 3.4.2 Schnittebenenverfahren

Schnittebenenverfahren, im englischen *Cutting Plane Methods* genannt, gehören zu den erfolgreichsten Verfahren zur Lösung (gemischt-) ganzzahliger Optimierungsprobleme.

Wir haben am Beispiel des LOP-Polytops (s. Abschnitt 3.3) bereits gesehen, dass es unmöglich ist, eine vollständige Beschreibung des assoziierten Polytops durch Ungleichungen zu erhalten. In der Praxis hat sich ausserdem herausgestellt, dass es meist genügt, nur einen kleinen Teil der Ungleichungen zu benutzen.

Die Schnittebenenverfahren machen sich dies zunutze. Die grundlegende Idee dahinter ist es, mit nur einer kleinen Teilmenge der Restriktionen zu beginnen, dann das resultierende LP zu lösen. Man erhält einen Lösungspunkt. Nun muß man prüfen, ob dieser bereits für alle Restriktionen zulässig ist. Falls dies so ist, sind wir bereits optimal (denn wir hatten Restriktionen weggelassen, die wir aber anscheinend nicht benötigt hatten, denn sie sind sowieso erfüllt). Andernfalls finden wir eine Restriktion, die an dem jetzigen Lösungspunkt verletzt ist.

Wir betrachten das Beispiel in Abbildung 3.12. (Dies ist fast das gleiche wie in Abbildung 3.10, jedoch mit geänderter Zielfunktion.) Wir nehmen an, dass wir nur die beiden Restriktionen (1) und (2) in unser LP nehmen. Die optimale Lösung liefert den Punkt  $z_1$ . Dieser verletzt jedoch die Restriktion (3), die wir zunächst weggelassen hatten. Im nächsten Schritt nehmen wir also genau diese Restriktion (3) zu unserem LP hinzu und re-optimieren. Durch diese Hinzunahme wird der Punkt  $z_1$  von dem neuen Zulässigkeitsbereich abgeschnitten. Wir erhalten den neuen Lösungspunkt  $z_2$ , der nun alle Restriktionen erfüllt, also Teil des Polytops ist. Die zu (3) gehörige Hyperebene bildet eine *Schnittebene* durch den alten Zulässigkeitsbereich. Deswegen heißt das Verfahren *Schnittebenenverfahren*.

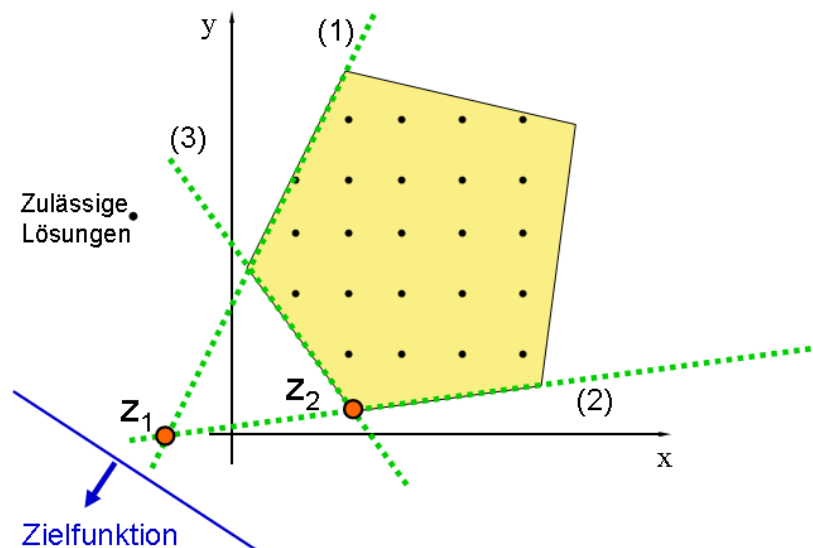


Abbildung 3.12: Schnittebenenverfahren: Ungleichungen werden nacheinander addiert

### Idee von Schnittebenenverfahren

0. Starte mit einer Teilmenge der Restriktionen (z.B. nur den trivialen  $0 \leq x \leq 1$ ).
1. Löse LP, sei  $x^*$  die gefundene Optimallösung.
2. Entscheide, ob es weggelassene Restriktionen  $a^T x \leq a_0$  gibt, so dass  $a^T x^* > a_0$ .  
 Falls nein: STOP (Relaxierung gelöst).  
 Falls ja: Bestimme solche, füge sie zu LP hinzu und gehe zu 1.

Die in 2. zu lösende Aufgabe heißt das *Separationsproblem*.

**Definition:** Das *Separationsproblem* ist das folgende: Gegeben ist ein Punkt  $\bar{x} \in \mathbb{R}^E$  und ein Polytop  $\mathcal{P}$ . Bestimme, ob  $\bar{x} \in \mathcal{P}$ , und falls  $\bar{x} \notin \mathcal{P}$ , finde eine Restriktion  $a^T x \leq a_0$ , die für alle Punkte  $x \in \mathcal{P}$  gültig ist, jedoch für den Punkt  $\bar{x}$  verletzt ist, d.h. für alle Punkte  $x \in \mathcal{P}$  muß gelten  $a^T x \leq a_0$ , und für  $\bar{x}$  muß gelten  $a^T \bar{x} > a_0$ .

**Beispiel LOP:** Können wir das Separationsproblem für das relaxierte LOP-Polytop lösen? Wir nehmen an, dass wir nur mit den Ungleichungen (3.40) beginnen und das dazugehörige LP lösen. Das heißt, wir beginnen mit dem System:

$$\max \bar{c}^T x \quad (3.42)$$

$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall (u, v) \in A, u < v \quad (3.43)$$

und lösen das Separationsproblem für die Klasse der 3-er Kreis Ungleichungen:

$$0 \leq x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1 \quad \forall u < v < w \in V \quad (3.44)$$

Optimierung über den Restriktionen (3.43) liefert einen optimalen Punkt  $\bar{x}$ . Können wir also in polynomieller Zeit herausfinden, ob der Punkt  $\bar{x}$  schon für das relaxierte LP-Polytop zulässig ist, oder falls nicht, können wir dann eine Ungleichung finden, die  $\bar{x}$  abschneidet, ohne jedoch einen zulässigen LOP-Punkt abzuschneiden?

Die Antwort ist ja: denn wir können der Reihe nach alle Ungleichungen aus der Menge (3.44) ausprobieren, denn es gibt höchstens  $O(n^3)$  3-er Kreise, also auch höchstens so viele Ungleichungen dieser Klasse. In jede der  $O(n^3)$  Ungleichungen müssen wir einfach nur  $\bar{x}$  einsetzen, um zu sehen, ob die Ungleichung am Punkt  $\bar{x}$  erfüllt oder verletzt ist. Sobald wir eine verletzte Ungleichung gefunden haben, haben wir das Separationsproblem gelöst. Wir fügen die gefundene Ungleichung (\*) zu unserem LP hinzu, und optimieren neu. Der neue optimale Punkt muß vom bisherigen Punkt abweichen, denn die Ungleichung (\*) muß ja nun erfüllt sein.

Der folgende Satz zeigt die polynomielle Äquivalenz von Optimierung und Separierung.

### SATZ 3.2 (Grötschel, Lovasz, Schrijver 1981)

Wir können eine lineare Zielfunktion über einem Polytop genau dann in polynomieller Zeit lösen, wenn wir das dazugehörige Separationsproblem in polynomieller Zeit lösen können (ohne Beweis).

**Beispiel Acyclic Subgraph:** Eng verwandt mit dem *Linear Ordering Problem* ist das *Acyclic Subgraph Problem*. Hier ist ein gerichteter Graph  $D = (V, A)$  mit Bogengewichten  $c_e \in \mathbb{R}^+$  gegeben, und gesucht ist der Teilgraph maximalen Gewichts, der keine gerichteten Kreise enthält. Das *Acyclic Subgraph Problem* ist i.A. NP-schwierig.

Die ILP-Formulierung ist sehr ähnlich wie die Formulierung des LOP-Problems. Allerdings haben wir hier keinen vollständigen Graphen gegeben, d.h., der Ausschluß von 3-er Kreisen ist hier nicht genug. Hier müssen die Ungleichungen tatsächlich alle gerichteten Kreise in  $G$  ausschließen. Die Formulierung ist die folgende:

$$\max \sum_{uv \in A} c_{uv} x_{uv} \quad (3.45)$$

$$\sum_{uv \in C} x_{uv} \leq |C| - 1 \quad \forall \text{ gerichteten Kreise } C \text{ in } G \quad (3.46)$$

$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall (u, v) \in A \quad (3.47)$$

$$x_{uv} \in \mathbb{Z} \quad \forall (u, v) \in A \quad (3.48)$$

Im allgemeinen kann es in einem Graphen exponentiell viele Kreise geben. D.h., die Kreis-Ungleichungen (3.46) sind i.A. exponentiell viele, was zur Folge hat, dass man diese Ungleichungen nicht von vornherein einem LP-Löser geben kann.

Obwohl das relaxierte LP (also nach Weglassen der Ganzzahligkeitsbedingung) exponentiell viele Ungleichungen besitzt, kann es in polynomieller Zeit gelöst werden. Dies geht mit Hilfe des obigen Satzes, die Äquivalenz von Optimierung und Separierung. Denn das Separationsproblem kann für diese Klasse von Ungleichungen folgendermaßen gelöst werden.

Wir nehmen an, dass wir zunächst das LP lösen, das nur aus den Ungleichungen (3.47) besteht. Wir erreichen den optimalen Punkt des LPs  $\bar{x}$ . Wie können wir nun für diesen Punkt und für die Klasse der Kreisungleichungen das Separationsproblem lösen?

Wir schreiben die Ungleichungen zunächst um:

$$\sum_{uv \in C} x_{uv} \leq |C| - 1 \Leftrightarrow |C| - \sum_{uv \in C} x_{uv} \geq 1 \Leftrightarrow \sum_{uv \in C} (1 - x_{uv}) \geq 1$$

Unser Ziel ist es, einen Kreis  $C$  zu finden, dessen Ungleichung

$$\sum_{uv \in C} (1 - \bar{x}_{uv}) \geq 1$$

am Punkt  $\bar{x}$  verletzt ist, d.h., wir wollen einen Kreis finden, für den gilt

$$\sum_{uv \in C} (1 - \bar{x}_{uv}) < 1.$$

Dies ist gleichbedeutend, in dem Graphen, in dem die Gewichte  $\bar{x}_{uv}$  durch neue Gewichte  $1 - \bar{x}_{uv}$  ersetzt werden, nach einem Kreis zu suchen, der, wenn man alle Bögen darin

aufaddiert, weniger als 1 ergibt.

Eine einfache Beobachtung ist nun: wenn der kürzeste Kreis bezüglich dieser Gewichte die Ungleichung nicht verletzt (d.h. die Summe der Werte ist größer gleich 1), dann existiert auch kein anderer Kreis, der die Ungleichung verletzt. Wenn aber der kürzeste Kreis die Ungleichung verletzt, dann haben wir eine Kreisungleichung gemäß dem Separationsproblem gefunden, die wir im nächsten Schritt zu unserem LP hinzunehmen können. D.h., selbst wenn wir die Suche auf den kürzesten Kreis beschränken, lösen wir auf jeden Fall das Separationsproblem.

Wir suchen also einen kürzesten Kreis in einem gewichteten gerichteten Graphen. Dieses Problem teilen wir in  $|A|$  Probleme auf, die jeweils einen kürzesten Kreis suchen, der eine bestimmte Kante  $f \in A$  enthält. Dazu führen wir für jede Kante  $f \in A$  die folgenden Schritte aus:

- (a) Fixiere die Kante  $f = (i, j)$
- (b) Berechne den kürzesten  $(j, i)$ -Weg in  $D$  bezüglich der neuen Kantenkosten  $1 - \bar{x}_{uv}$  für alle Kanten  $(u, v) \in A$ . Dieser bildet zusammen mit der Kante  $f = (i, j)$  einen Kreis, der  $f$  enthält.
- (c) Falls die Weglänge  $W$  plus das Gewicht  $(1 - \bar{x}_{ij})$  der Kante  $f = (i, j)$  kleiner als 1 ist, dann haben wir eine verletzte Ungleichung gefunden. Das Separationsproblem ist gelöst.
- (d) Sonst: ist dies der Beweis, dass keine verletzte Kreis-Ungleichung, die  $f$  enthält existiert.

Sobald wir eine verletzte Kreisungleichung für eine Kante  $f$  gefunden haben, fügen wir diese zu unserem LP hinzu und re-optimieren. Wir erhalten eine andere Lösung, für die wir wiederum das Separationsproblem lösen müssen. Dies machen wir solange, bis wir einen Punkt erreichen, für den keine verletzte Ungleichung gefunden wird. Dann wissen wir, dass wir das assoziierte Optimierungsproblem gelöst haben.

Wir haben also das relaxierte *Acyclic Subgraph* LP in polynomieller Zeit gelöst, obwohl es exponentiell viele Ungleichungen besitzt.

Ein anderes, sehr berühmtes Beispiel, ist das Handlungsreisendenproblem (*Traveling Salesman Problem*, TSP), das wir im folgenden betrachten werden.

**Beispiel TSP:** Gegeben ist ein vollständiger Graph  $K_n = (V, E)$  mit Kantengewichten  $c \in \mathbb{R}^E$ , gesucht ist eine Rundtour (bzw. Tour oder Hamiltonkreis, das sind Kreise, die jeden Knoten genau einmal besuchen) minimalen Gewichts.

Zunächst finden wir eine ILP-Formulierung für das TSP. Die Menge der zulässigen Lösungen ist die Menge aller Touren in  $K_n$ . Als Variable wählen wir die Menge der Kanten in  $K_n$ . Jeder Tour entspricht also ein 0/1-Vektor  $x \in \mathbb{R}^E$  und umgekehrt. Wir assoziieren mit der Variablen  $x_e$  einen Wert von 1 genau dann, wenn die Kante  $e$  Teil der Tour ist;  $x_e = 0$  bedeutet, dass diese Kante  $e = (u, v)$  nicht Teil der Tour ist.

Was zeichnet nun Touren aus? Touren besuchen jeden Knoten genau einmal. D.h., die Anzahl derjenigen zu  $v$  inzidenten Kanten in einer Tour ist genau 2. Dies führt zu der folgenden Gleichung für jeden Knoten  $v \in V$ . Dabei ist  $\delta(v)$  die Menge aller zu  $v$  inzidenten Kanten.  $x(\delta(v))$  bezeichnet die Summe aller Werte  $x_e$ , deren Kanten sich in  $\delta(v)$  befinden.

$$x(\delta(v)) = 2 \quad \text{für alle } v \in V$$

Diese Gleichungen heißen *Grad-Gleichungen*. Die Gleichungen alleine genügen noch nicht, um Touren zu charakterisieren. Eine wichtige Bedingung, die noch fehlt, ist die Eigenschaft des Zusammenhangs. Wenn man eine beliebige Tour  $T$  gegeben hat, und eine Knotenmenge  $W \subseteq V$  und alle Kanten betrachtet, die in der Knotenmenge  $W$  beginnen und außerhalb  $W$  enden, dann müssen davon mindestens zwei Kanten Teil von  $T$  sein. (Manche Touren enthalten auch 4 oder mehrere Kanten davon, aber es gibt auch Touren, die nur zwei Kanten enthalten). Dies führt zu den sogenannten *Subtour-Eliminations-Ungleichungen*:

$$x(\delta(W)) \geq 2 \quad \text{für alle } W \subseteq V, W \neq \emptyset, W \neq V$$

Ein Schnitt  $\delta(W)$  einer Knotenmenge  $W \subseteq V$  bezeichnet alle Kanten, die einen Endknoten in  $W$ , und einen Endknoten außerhalb von  $W$  besitzen.  $x(\delta(W))$  bezeichnet die Summe aller Werte  $x_e$ , deren Kanten sich im Schnitt  $\delta(W)$  befinden.

Zusammengefaßt entsprechen die zulässigen Lösungen des TSP-Problems genau den Lösungen des Systems:

$$\min c^T x \tag{3.49}$$

$$x(\delta(v)) = 2 \quad \text{für alle } v \in V \tag{3.50}$$

$$x(\delta(W)) \geq 2 \quad \text{für alle } W \subseteq V, W \neq \emptyset, W \neq V \tag{3.51}$$

$$0 \leq x_e \leq 1 \quad \text{für alle } e \in E \tag{3.52}$$

$$x_e \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } e \in E \tag{3.53}$$

D.h., die Menge der zulässigen Lösungen dieses ILPs entsprechen genau den charakteristischen Vektoren von Touren. Eine Optimallösung ist charakteristischer Vektor einer kürzesten Tour. Das Weglassen der Ganzzahligkeitsbedingungen ergibt wieder eine LP-Relaxierung, mit deren Hilfe eine Schranke für den Optimalwert berechnet werden kann.

Können wir die LP-Relaxierung lösen? Die Anzahl der Grad-Gleichungen (3.50) ist genau  $n$ . Allerdings ist die Anzahl der *Subtour-Eliminations-Ungleichungen* exponentiell

(denn es gibt eine Ungleichung für jede Teilmenge  $W$  von  $V$ ). Allerdings können wir das Separationsproblem für die Ungleichungen (3.51) lösen.

Wir beginnen hier mit den Grad-Gleichungen (3.50) und den 0/1-Schranken (3.52) und lösen das erhaltene LP. Die optimale Lösung des LPs sei  $\bar{x}$ . Wir berechnen nun in dem Graphen mit den Kantengewichten  $\bar{x}_e$  (für alle Kanten  $e \in E$ ) einen minimalen Schnitt. (Dies geht u.a. in polynomieller Zeit mittels des  $(s, t)$ -Netzwerkfluß-Algorithmus von Ford/Fulkerson; s. auch Übung).

Dieser gibt uns eine Menge  $W \subseteq V$  und den Wert  $\bar{x}(\delta(W))$  zurück. Falls  $\bar{x}(\delta(W))$  kleiner als 2 ist, dann haben wir eine verletzte Ungleichung gefunden. Andernfalls ( $\bar{x}(\delta(W))$  größer gleich 2) kann keine Menge  $W$  existieren, deren Schnitt am Punkt  $\bar{x}$  kleineren Wert als 2 hat. Damit haben wir das Separationsproblem für die *Subtour-Eliminations-Ungleichungen* gelöst, obwohl es exponentiell viele Ungleichungen sind.

Am Ende (wenn keine verletzte Ungleichung mehr gefunden wird) haben wir die optimale Lösung für unsere LP-Relaxierung erhalten. Und dies in polynomieller Zeit. D.h. wir können die *TSP-Kurzzyklenrelaxierung* in polynomieller Zeit lösen, obwohl wir sie nicht in polynomieller Zeit aufschreiben können! Dies ist nur mit Hilfe des Separationsproblems möglich.

### Bemerkungen zum TSP-Polytop

Das TSP-Polytop ist folgendermaßen definiert:

$$STSP(n) = \text{conv}\{\chi^H \mid H \text{ Tour in } K_n\}$$

Nach Minkowski/Weyl existiert auch die folgende Formulierung:

$$STSP(n) = \{x \in \mathbb{R}^{E_n} \mid Ax = b, Dx \leq d\}$$

Würden wir sie kennen, so würde das *TSP* zu einem (riesigen) *LP*. Vollständige Facettialbeschreibungen sind nur für sehr kleine  $n$  bekannt:

$n$	Quelle	Anzahl Facetten
3		0
4		3
5		20
6	Norman [1955]	100
7	Boyd & Cunningham [1991]	3437
8	Christof, Jünger, Reinelt [1991]	194187
9	Christof/Padberg [1996]	42104442
10	Christof/Padberg [1996]	$\geq 51043900866$

Obwohl die Zahlen bereits für  $n = 10$  sehr groß sind, so ist es trotzdem möglich, mit Hilfe von Schnittebenenverfahren (in Kombination mit Branch-And-Bound, s. nächster Abschnitt) sehr große Instanzen des TSPs zu lösen. Das größte beweisbar optimal gelöste TSP besitzt über 20.000 Städte. Das TSP-Polytop ist eines der am besten studierten Polytope. Es sind sehr viele Ungleichungsklassen bekannt, die Facetten des Polytops beschreiben, d.h. für die vollständige Beschreibung des TSP-Polytops notwendig sind. Dies ist auch der Grund, warum man so große TSP-Instanzen exakt lösen kann.

### 3.4.3 Branch-and-Cut Verfahren

Branch-and-Cut Verfahren verbinden Schnittebenenverfahren mit Branch-and-Bound. Jedoch versucht man hier, die einzelnen Teilprobleme (LP-Relaxierungen) mittels Schnittebenenverfahren zu lösen. Nur wenn man dort nicht mehr weiterkommt (weil man z.B. keine Ungleichungen mehr kennt, die verletzt sein könnten), teilt man die Probleme auf (*Branching*). Dies ist der Fall, falls die Lösung der LP-Relaxierung nicht ganzzahlig ist (also kein charakteristischer Vektor einer zulässigen Lösung ist). Dann wähle eine nicht-ganzzahlige Variable  $x_e$  und generiere zwei neue Teilprobleme:

$P1$  mit zusätzlichen Restriktionen  $x_e = 0$

$P2$  mit zusätzlichen Restriktionen  $x_e = 1$

Jedes der neuen Teilprobleme versucht man nun wieder neu mit Hilfe des Schnittebenenverfahrens zu lösen. Dies ist der wesentliche Unterschied zu Branch-and-Bound, wo man nur gute Bounds für jedes Teilproblem berechnen möchte, ohne den Anspruch zu haben, diese exakt zu lösen.

Idealerweise gibt es bei Branch-and-Cut Verfahren einen relativ kleinen Branch-and-Bound Baum, während dieser bei Branch-and-Bound typischerweise groß ist.

Abbildung 3.13 zeigt ein Flußdiagramm für Minimierungsprobleme z.B. *TSP*. Der Erfolg von Branch and Cut Algorithmen beruht auf

- (a) der Verwendung *guter* LP-Relaxierungen
- (b) schnellen Separationsalgorithmen für (a)
- (c) zahlreichen strategischen und algorithmischen „Tricks“

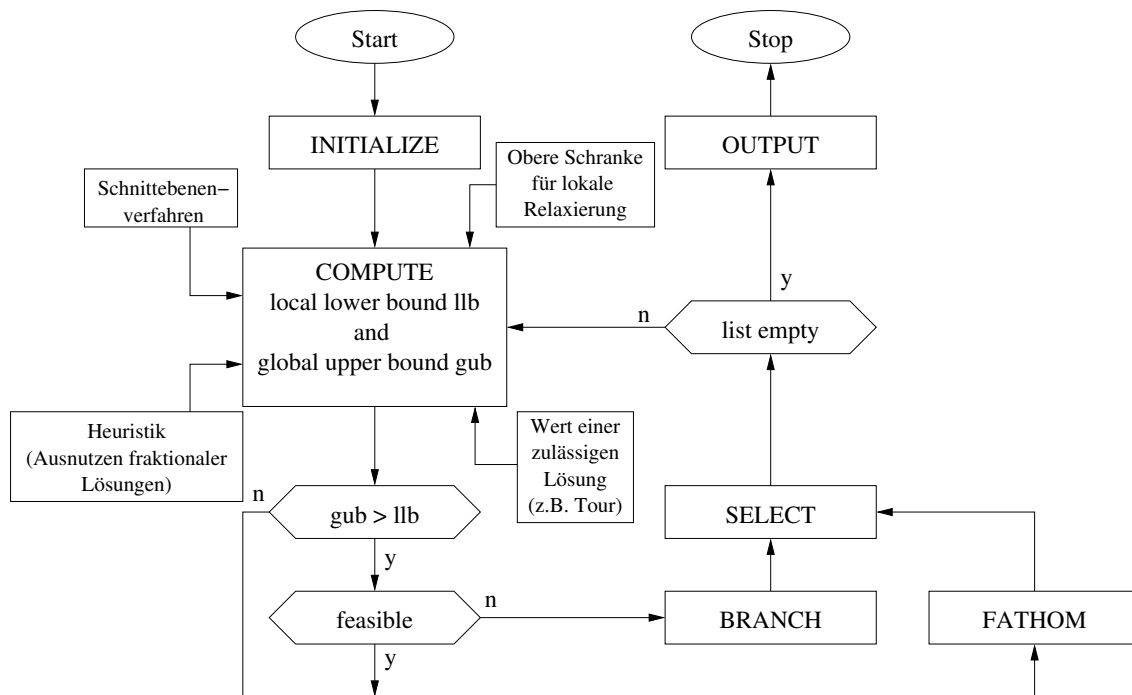


Abbildung 3.13: Ein Flußdiagramm für Minimierungsprobleme