

Sei \bar{x} Gleichgew. Zust. von $\dot{x} = f(x)$
 und Ω eine offene Nachbarschaft von \bar{x} in U

\bar{x} ist stabil, wenn

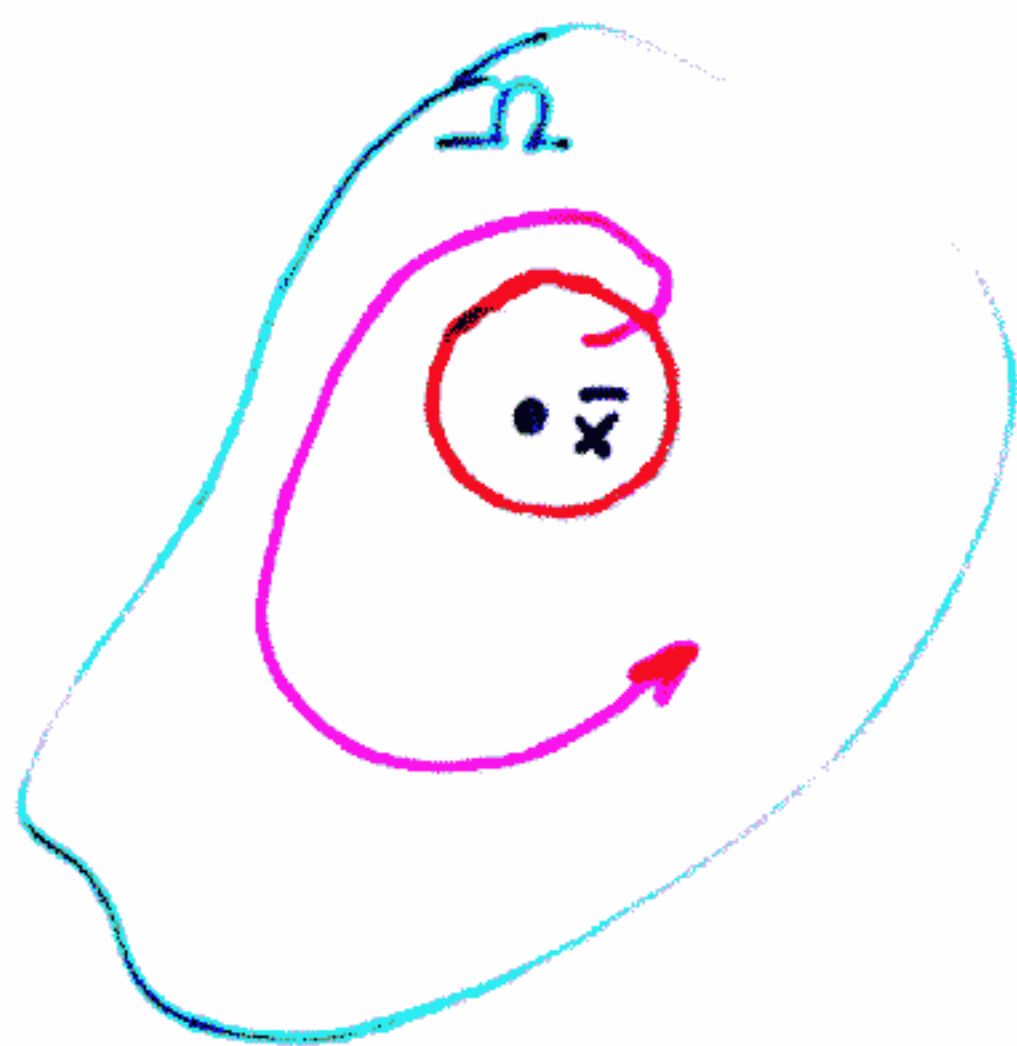
für jedes Ω der Orbit $x(t)$ für alle $t \geq 0$ in Ω
 bleibt bei Start nahe genug an \bar{x}

sonst ist \bar{x} instabil

Speziell: \bar{x} ist asymptotisch stabil, wenn

es ein Ω_0 gibt, in dem \bar{x} enthalten ist, für
 das $x(t \rightarrow \infty) \rightarrow \bar{x}$ bei Start innerhalb von Ω_0

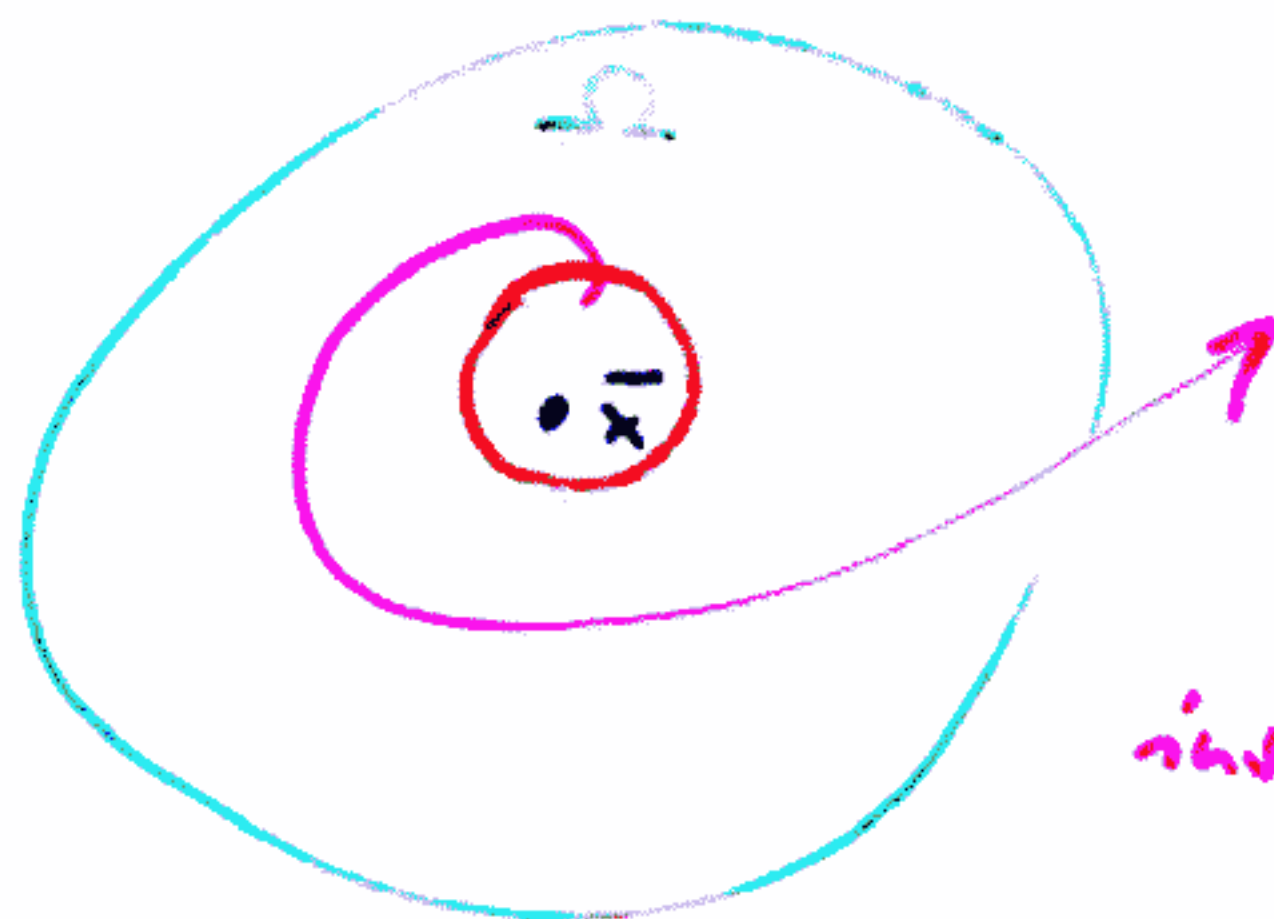
das größtmögliche Ω_0 heißt Attraktor - Basin
 von \bar{x}



stabil



asymptot. stabil



instabil

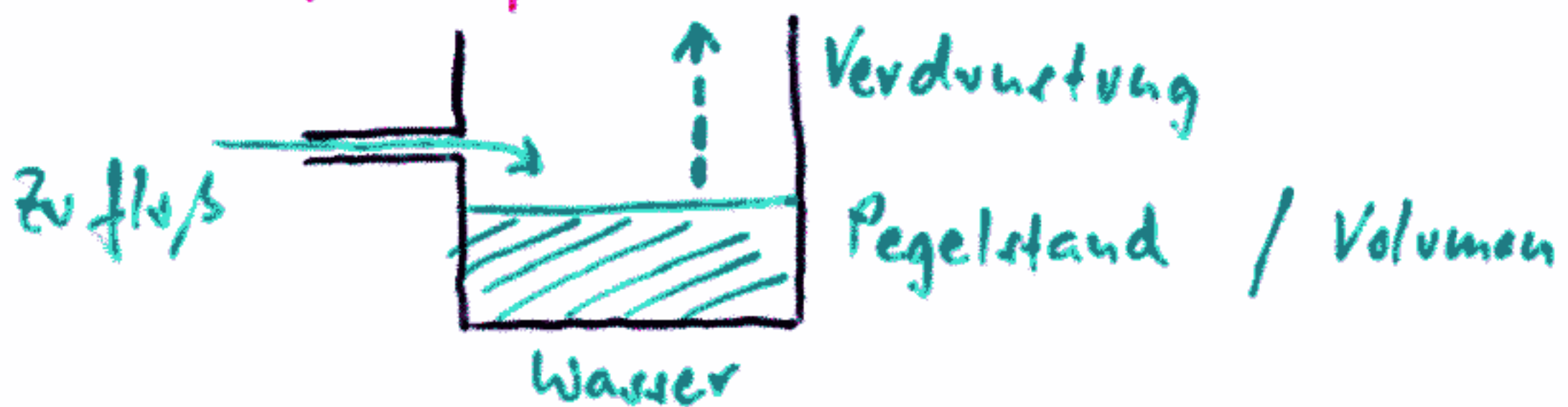
falls $\Omega_0 = U$, dann ist \bar{x} global asymptotisch stabil

(z.B. senkrechttes Federsystem mit Schwerebesch. ohne Antriebskraft)

Systeme der Form $\dot{x} = f(x)$ lassen sich i.a. nicht explizit lösen!

mitunter interessiert $x(t)$ nicht so sehr, und man begnügt sich mit Aussagen zu \bar{x}
besonders zu Stabilität von \bar{x}

3.4 Fließ-Systemmodelle



wichtig: Pegel ist Zustandsgröße (level) [cm]
Zufluss sind Flußgrößen (rates) [m³/zeit]
Verdunstung

Portemonnaie: Inhalt Zustand [Menge]
 Zugänge Rate [Menge/zeit]
 Abgänge Rate

nicht verwechseln!

Quote %
Änderungsrate einer Quote %/Zeiteinheit

nicht additiv!

Fließmodelle führen zu Dgl. (falls zeitkontinuierlich)

Änderungsrate des Volumens = Zuflussrate - Verdunstungsrate
 $\dot{v} = k_1 - k_2 v^{2/3}$

also $\dot{v} = k_1 - k_2 v^{2/3}$

Fließgleichgewicht: $\dot{v} = 0$

$$\bar{v} = (k_1 / k_2)^{3/2}$$

Stabilität

wir schauen auf Vorzeichen von \dot{v}

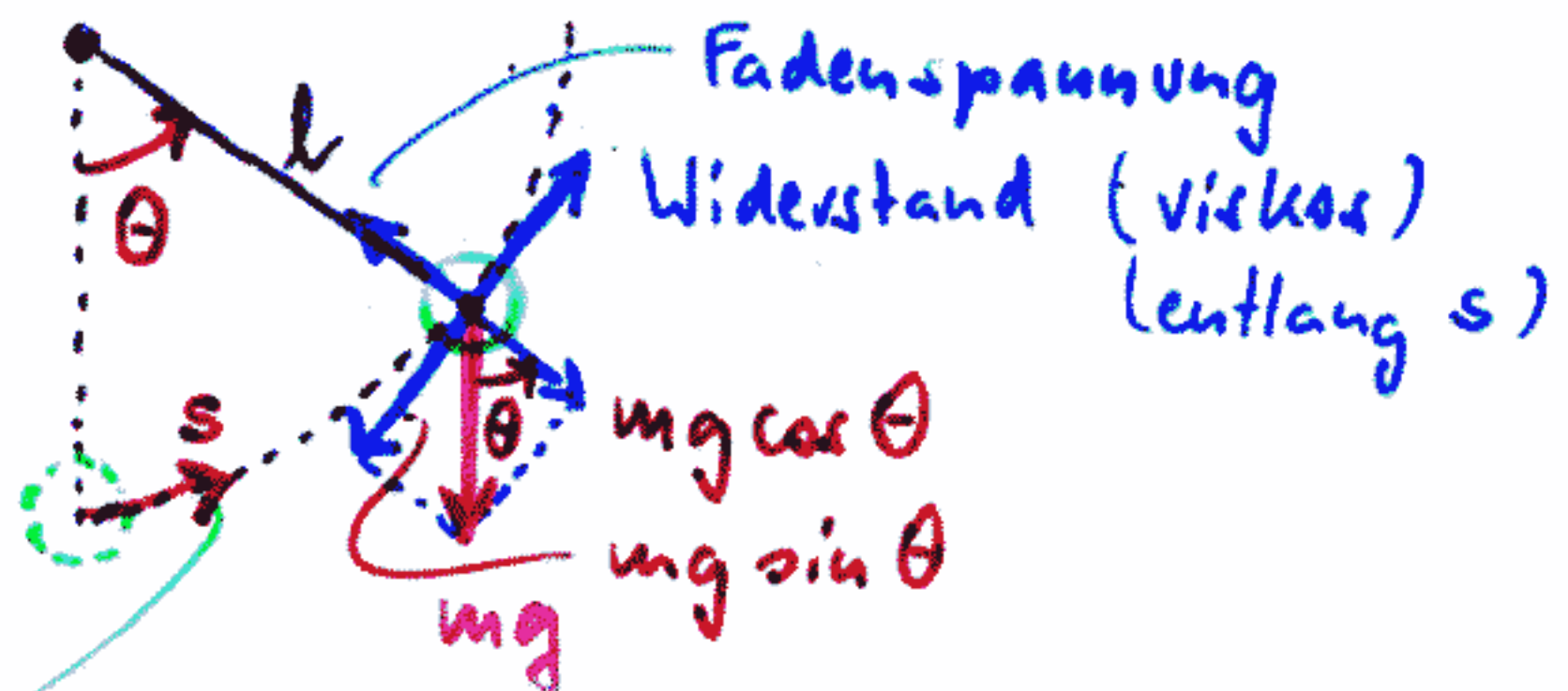
für $v < \bar{v}$	ist $\dot{v} > 0$	Volumen nimmt zu
$v > \bar{v}$	$\dot{v} < 0$	" " ab

der Zustand \bar{v} ist global asymptotisch stabil

diese Aussage kann getroffen werden, ohne die Dgl. zu lösen!

bisher: lineare dynamische Systemmodelle

3.5 ein nichtlin. dyn. Systemmodell: Pendel in Ebene



wir betrachten Bewegung entlang Bogenlinie

Bogenlänge

$$s = l \cdot \theta$$

$$l = \text{const}$$

$$\dot{s} = l \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{s} = l \cdot \ddot{\theta}$$

Beschleunigung entlang Bogen

$$m \ddot{s} = -k_n \dot{s} - mg \sin \theta$$

$$m l \ddot{\theta} = -k_n l \dot{\theta} - mg \sin \theta$$

mit $\tau = k_n / m$ folgt

$$\ddot{\theta} + \tau \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

deswegen nichtlinear!

diese Dgl. lässt sich nicht explizit lösen

numerische Computer-Integration \rightarrow Näherungslösungdazu Startwerte θ_0 und $\dot{\theta}_0$ benötigt

wir wollen aber nicht wissen, wann das Pendel in welcher Lage ist (Kurzfristprognose),

sondern nur, ob es einen langfristigen Gleichgewichtszustand gibt und wie dieser aussieht

Stabilitätsfrage

„Einsicht“ in qualitatives Verhalten

Neue Formulierung mit $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\tau x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1$$

} zwei gekoppelte
Dgl. 1. Ordnung

Gleichgewichtsbedingung $\dot{x} = 0$ $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = 0$
 zwei simultane Gleichungen

$$x_2 = 0$$

$$\sin x_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = \pm u \cdot \pi \quad \text{für } u=0,1,2,\dots$$

→ 2 Fixpunkte

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

? Welcher ist stabil, instabil

3.6 Stabilität eines linearen Systems

gegeben: System zweier linearer Dgl. 1. Ordnung

$$\dot{u}_1 = a_{11} u_1 + a_{12} u_2$$

$$\dot{u}_2 = a_{21} u_1 + a_{22} u_2$$

$$a_{ij} = \text{const.}$$

$$\dot{u} = Au$$

in Vektor-Matrix Schreibweise

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

beschreibt Orbit in \mathbb{R}^2

Annahme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

nicht-singulär

Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ verschieden

(generische Situation)

dann

$$u(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} c_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} c_2 \quad (3.7)$$

wobei c_1, c_2 linear unabh. Eigenvektoren von A
 entspr. den Eigenwerten λ_1 und λ_2

Fallunterscheidung :

A $\lambda_{1,2}$ reell

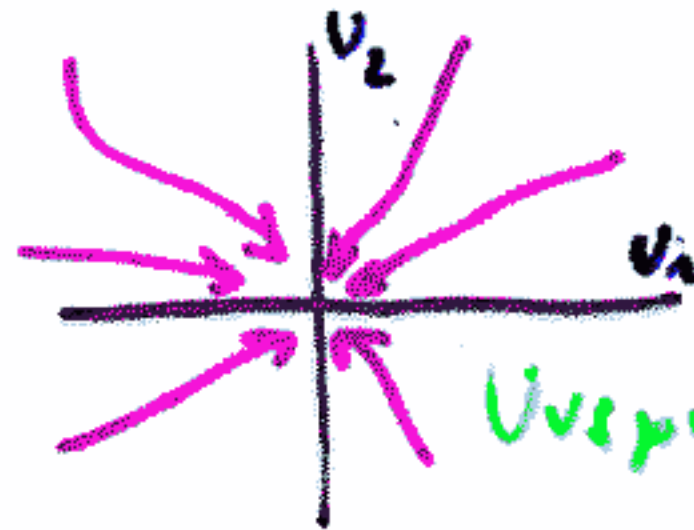
A1 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

A2 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

A3 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (oder umgekehrt)

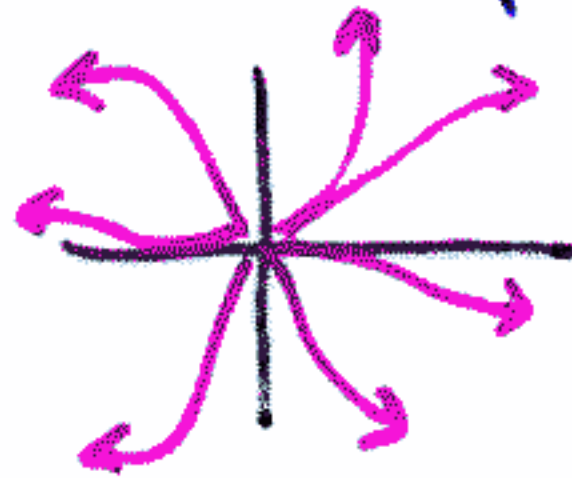
B $\lambda_{1,2}$ komplex = $\sigma \pm iq$ $\sigma = \text{Re } \lambda_i$
 $q = \text{Im } \lambda_i$

Zu A1 : $u(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ (unabh. von $u^{(0)}$)



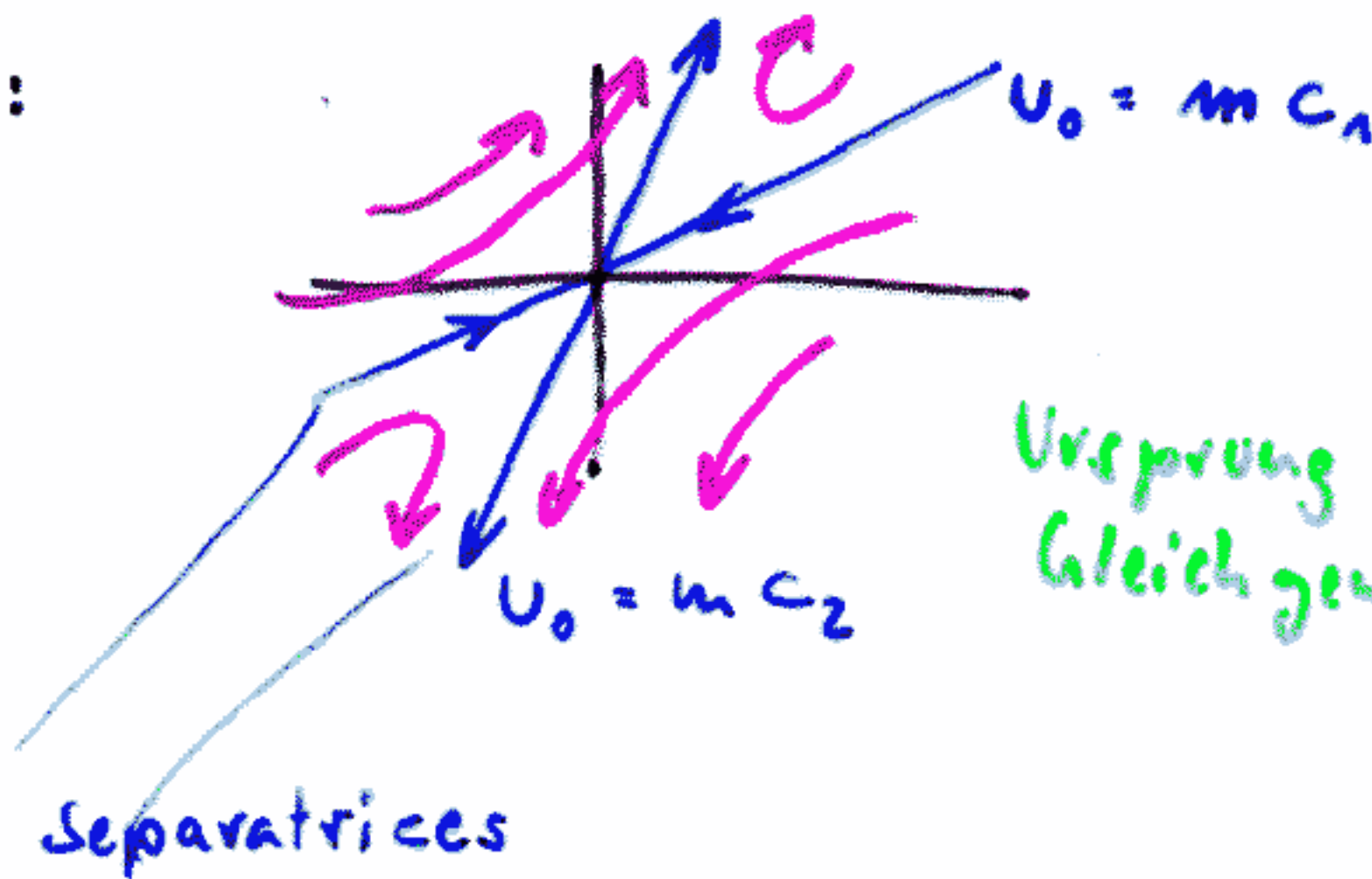
Ursprung ist ^{global} stabiler Attraktor

Zu A2 : $u(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ (für alle $u \neq 0$)



Ursprung ist Repellor (instabil)

Zu A3 :



Ursprung ist Sattelpunktsgleichgewicht (instabil)

Separatrices

Fall B $\lambda_i = \sigma \pm iq$ konjugiert komplex

$$v(t) = e^{\sigma t} (\xi_1 \cos qt + \xi_2 \sin qt)$$

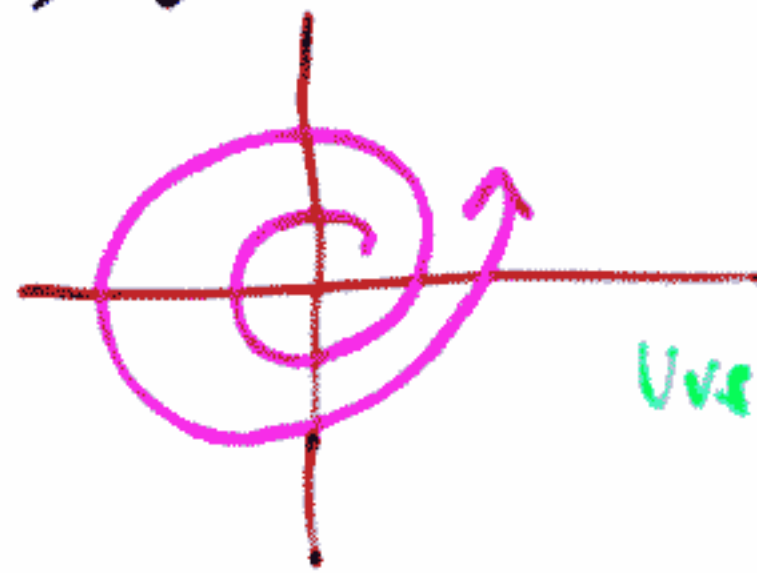
ξ_1, ξ_2 sind geeignete Vektoren

B1 : $\sigma = \operatorname{Re} \lambda_i < 0$



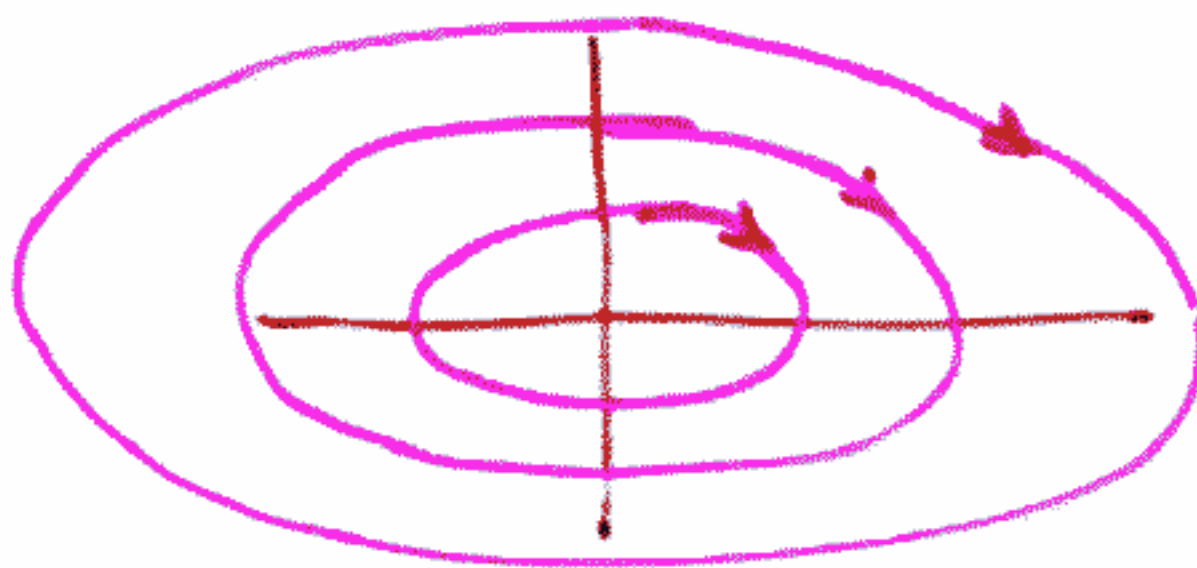
Ursprung global asymptotisch stabil
(unabh. von v_0)

B2 : $\sigma > 0$



Ursprung instabil
(Repellor)

B3 : $\sigma = 0$



neutral stabiler Fall
Lösung stets begrenzt
geschlossene Bahnen

(vgl. ungedämpftes
Feder-Masse-System)

Bahnen kreuzen sich nicht!

Bahn ist eindeutig durch Startpunkt gegeben

(zyklische Lösung)

(determinist. System)

↑ glatte Funktionen / eindeutige Lösungen

Lemma

- Die Eigenwerte λ_i der 2×2 Matrix A genügen der Bed. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ iff $\lambda_1 \lambda_2 = \operatorname{Det} A > 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Spur} A < 0$
- Sie sind rein imag. iff $\operatorname{Spur} A = 0$
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (oder $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$) iff $\operatorname{Det} A < 0$

3.7 Stabilität eines nichtlinearen dyn. Systems

Dgl. allg. autonomes System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Sei $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ einziger Gleichgew. Zustand

neue Größe: Abweichung $u_i = x_i - \bar{x}_i$

Taylor - Reihe

$$f_i(x_1, x_2) = \underbrace{f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}_{0 \text{ wg. Gleichg.}} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) u_2 \quad (+ \text{hö. T.}) \quad (3.10)$$

ferner gilt: $\dot{u}_i \equiv \dot{x}_i$

für kleine Abweichungen: höhere Terme vernachlässigbar

folgt $\dot{u} = Au$ mit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\text{und } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Bigg|_{x=\bar{x}} \quad (3.11)$$

um den Fixpunkt

Jacobische Matrix

(3.11) ist 'linearisiertes' System zu (3.9)

Stabilitätsfrage $x(t \rightarrow \infty) \rightarrow \bar{x}$?

jetzt reduziert auf $u(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$?

Vorsicht: da u per def. 'klein': nur lokale Stab.

Wenn linearisiertes System ein globales a. s. Gleichgewicht besitzt, dann ist \bar{x} zumindest lokal a. s.

(wie lokal \rightarrow später)

dazu muß (s.o.) A (Jacobi-Matrix) Eigenwerte mit neg. Realteil haben

Wenn \bar{u} neutral stabil ist \rightarrow keine Aussage über \bar{x}

\bar{u} instabil \rightarrow keine Aussage

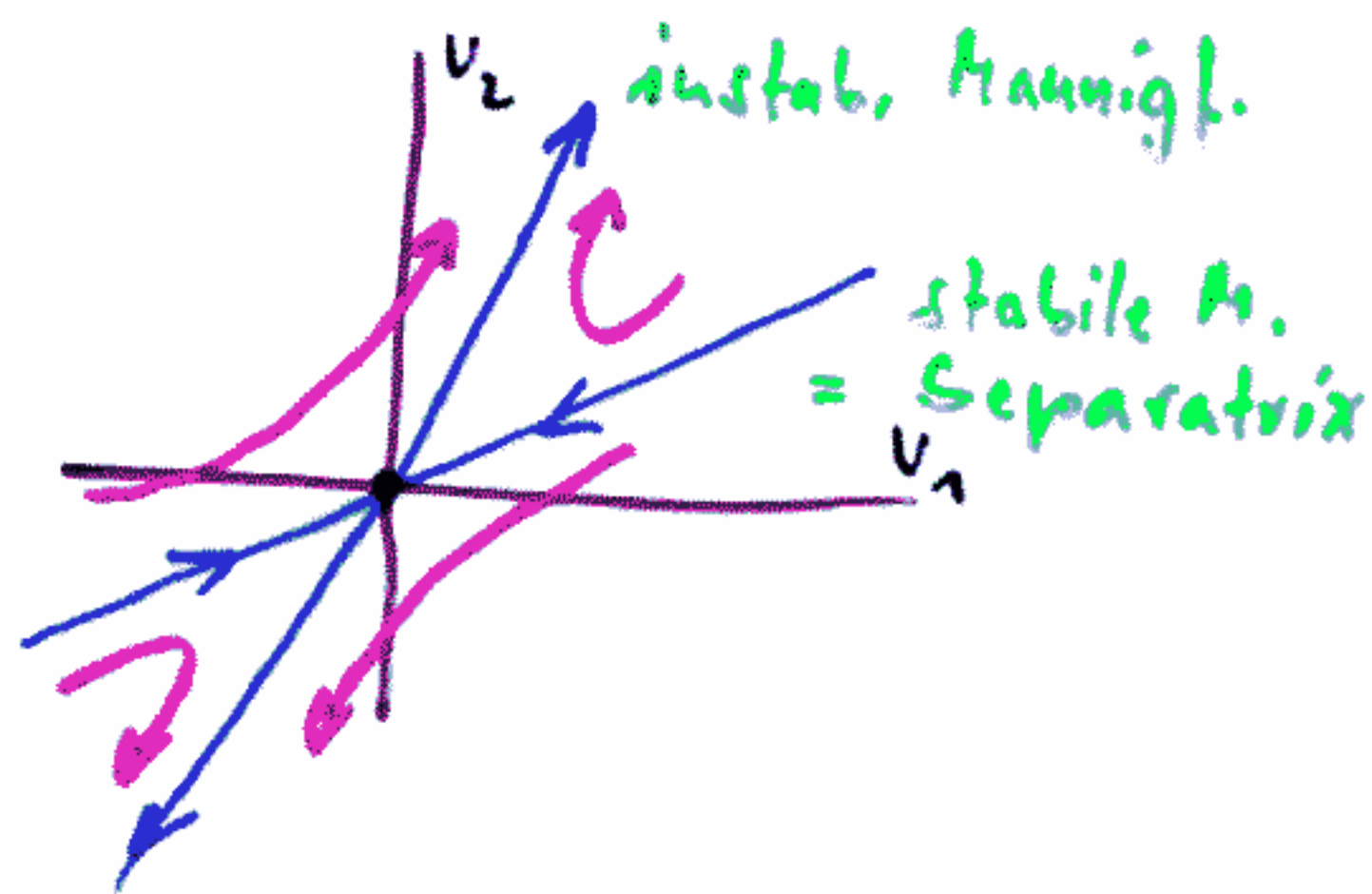
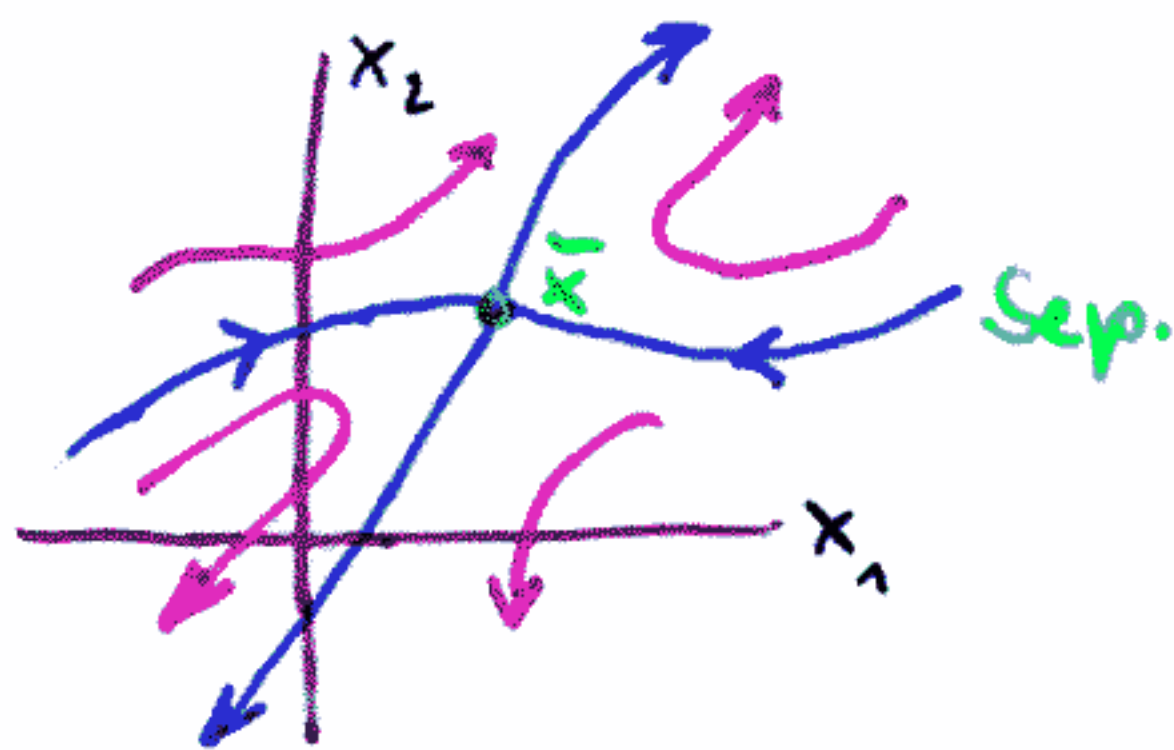
(weil x sich von \bar{x} entfernt und Approx. nicht mehr gültig)

\bar{x} hyperbolisches Gleichgew., wenn Eigenwerte des lin. Systems Realteil $\neq 0$ haben;

dann sind Orbits nahe \bar{x} qualitativ ähnlich denen des lin. Systems nahe Ursprung

(Hartman - Grobman - Theorem)

Wenn \bar{x} Sattelpunkt, dann gibt es Paar von Orbits die s. auf \bar{x} zu (von \bar{x} fort) bewegen und deren Tangente in \bar{x} ein Eigenvektor von A mit neg. (pos.) Eigenwert ist



Beispiel Pendel

$$A = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{array} \right) \Big|_{x=\bar{x}} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\gamma \end{array} \right) \Big|_{x=\bar{x}}$$

a) an Stelle $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } A = \frac{g}{l} > 0$$

$$\text{Spur } A = -\gamma < 0$$

Also ist $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lokal stabiles Gleichgew.

b) an Stelle $\bar{x} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{g}{l} & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } A = -\frac{g}{l} < 0$$

$$\text{Spur } A = -\gamma < 0$$

Also ist $\bar{x} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ instab. Sattel-Gleichgew.

Aber: selbst wenn \bar{x} nicht lokal asympt. stabil,

(für nichtlin. System) kann es evtl. doch noch begrenzt und damit stabil sein

(genauere Aussage für $x(t \rightarrow \infty)$ ist mit linearer Stab. analyse nicht möglich)

3.8 Das Phasen - Porträt

Weiteres Werkzeug zum Verständnis des qualitativen Verhaltens nichtlin. dyn. Systemmodelle

Bsp. skalare Dgl. 2. Ordnung

$$\ddot{p} + f(p, \dot{p}) = 0$$

z.B. (Pendelgl. mit $p = \theta$)

Zunächst Vereinfachung

$$(3.12) \quad \ddot{p} + f(p) = 0$$

(Pendel mit $\tau = 0$)

(dies beschreibt Bewegung eines Körpers entlang Koordinatenrichtung p // Mechanik //)
Energie

(3.12) multipliz. mit \dot{p} und integriert:

$$\ddot{p} \dot{p} + \dot{p} f(p) = 0$$

$$\frac{1}{2} \dot{p}^2 + \int_0^p f(s) ds = \text{const}$$

$$\frac{1}{2} \dot{p}^2 + U(p) = c$$

kinetische potentielle Energie

Summe (Gesamtenergie) ist const. entlang Orbits

Energieerhaltungssatz

hier: gut, um Variable p und \dot{p} in Beziehung zueinander zu setzen



Phasen - Ebene

Bsp. senkr. Feder-Masse-System ohne Dämpfung

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0$$

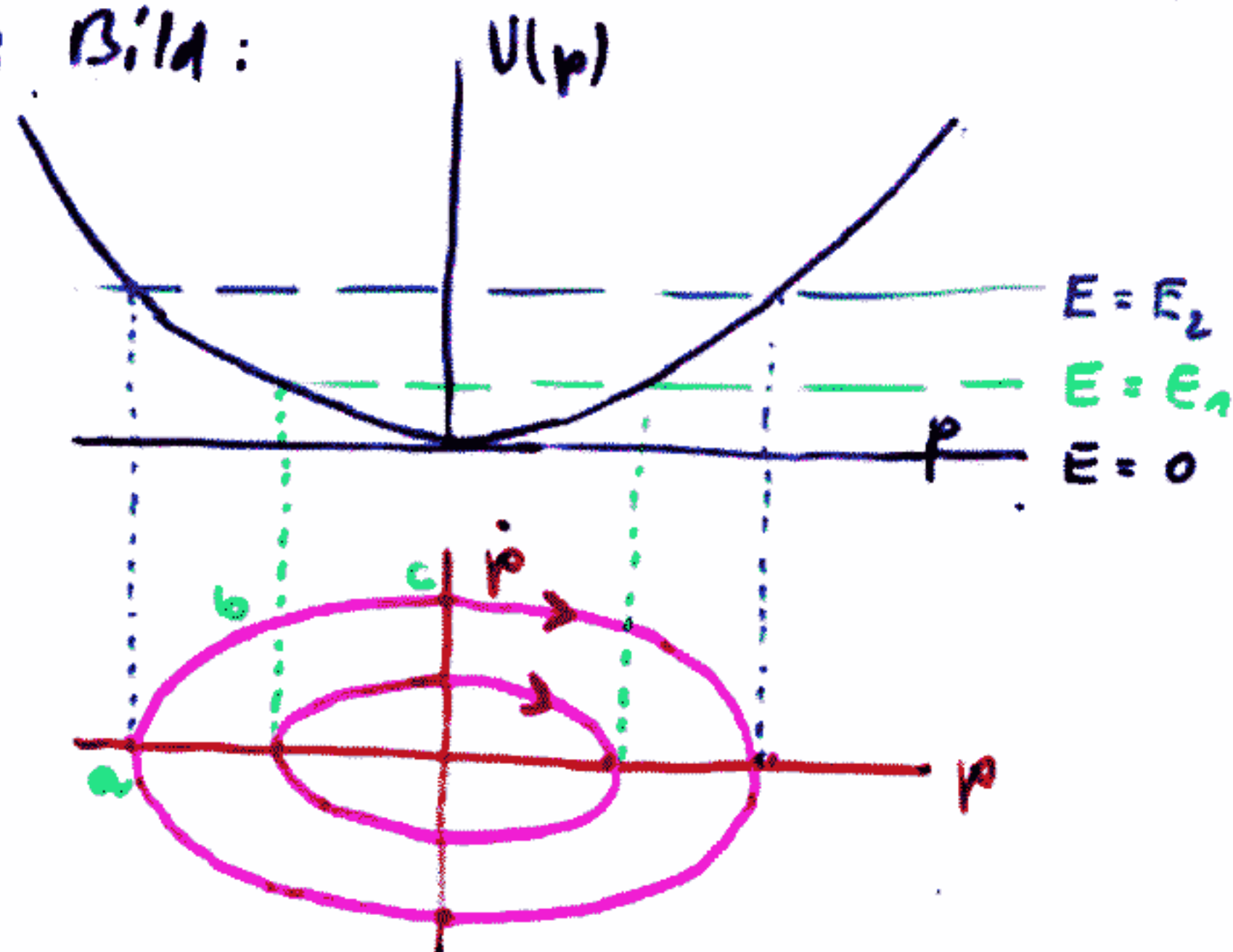
in diesem Fall $U(p) = \omega^2 \int_0^p s ds = \frac{\omega^2 p^2}{2}$

$$\text{Somit } E = \frac{1}{2} (\dot{p}^2 + \omega^2 p^2) = \text{const}$$

das ist Gleichung für eine Ellipse in (p, \dot{p}) -Ebene!

je nach Betrag von E verschiedene Ellipse
(Familie konzent. Ellipsen)

anderes Bild:



allg. $E \geq U(p)$; $E = U(p)$ nur für $\dot{p} = 0$ (a)

wenn $U(p) < E$ muß also $\dot{p} > 0$ sein (b)

\dot{p} erreicht Max. für $U(p) = 0$ bei $p = 0$ (c)

Pfeilrichtung ergibt s. aus: $\dot{p} > 0$ für p wachsend
 $\dot{p} < 0$ für p fallend

Also: p oszilliert regulär (harmon. Oszillator)

\dot{p} erreicht Max. für $p = 0$

mathematisch lassen sich alle mögl. Bewegungen des Feder-Masse Systems in der $\varphi, \dot{\varphi}$ -Phaseebene beschreiben

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{besitzt neutrale Stabilität}$$

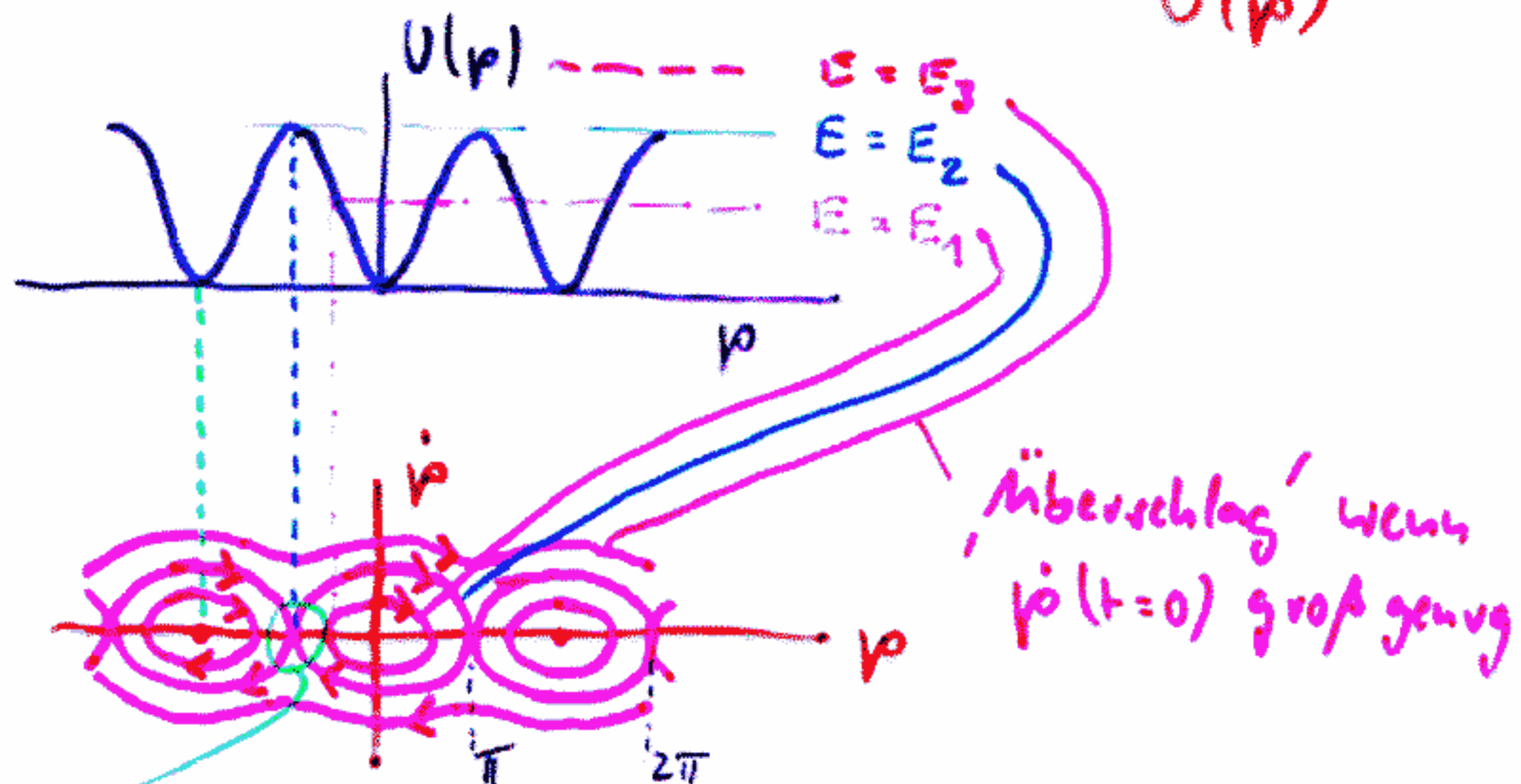
jetzt wieder: Pendel (nichtlin. Fall)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (\varphi \text{ statt } \theta)$$

Gesamtenergie

$$E = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{g}{l} \int_0^{\varphi} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{g}{l} (1 - \cos \varphi)$$

$U(\varphi)$



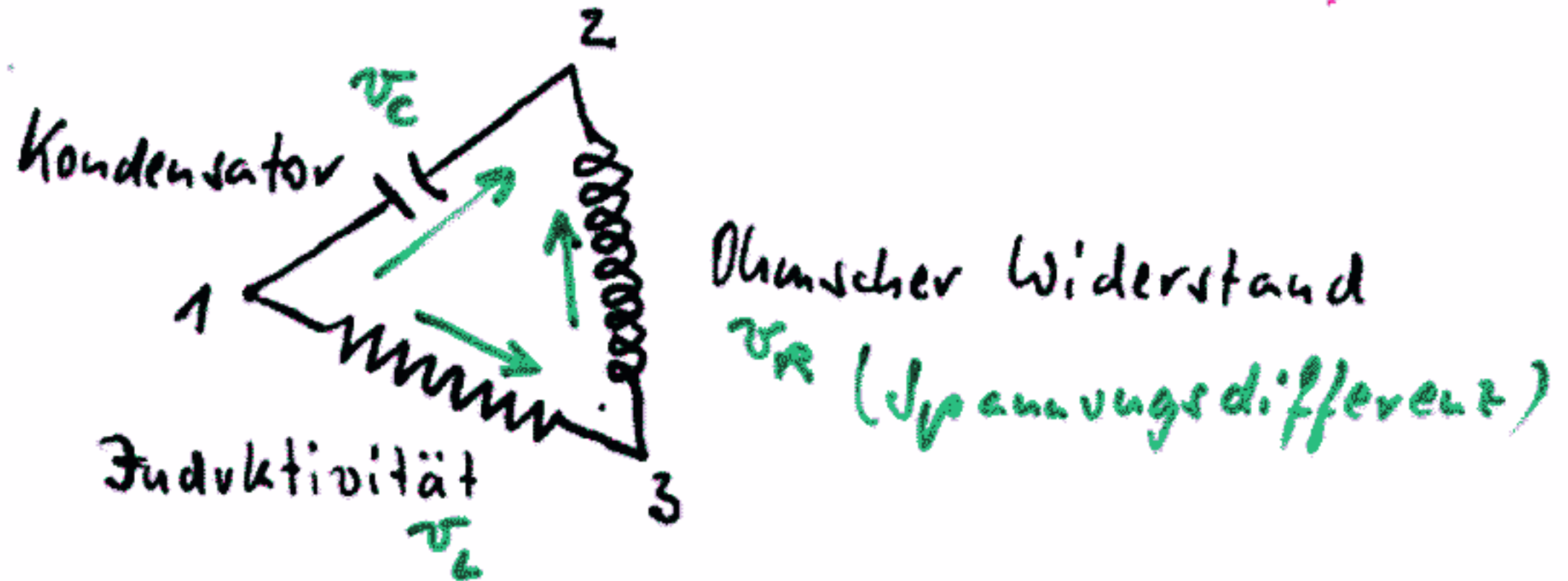
Phasenporträt des ungedämpften Pendels

(instabiles Gleichgew. für $U(\varphi) = E_2$ für $\varphi = \pm \pi$
 dieser Zustand kann nur asymptotisch angenähert werden, in endlicher Zeit nicht erreicht werden
 (weil sich hier Lösungen kreuzen würden \rightarrow Verletzung des Eindeutigkeitsprinzips)

$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ neutral stabiles Gleichgew.

$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix}$ instabiles Gleichgew. (Sattel)

anderes Beispiel (zum Selbststudium!)



v_C sei (von außen) fest eingespeist

Kirchhoff : $v_C = v_L + v_R$

? Strom $u(t)$

$$v_L = \dot{u}$$

$$v_C = - \int_0^t u(s) ds = v$$

$$v_R = \alpha \left(\frac{1}{3} u^3 - u \right) \quad \text{mit } \alpha > 0$$

⋮

Van der Pol Gleichung $\ddot{u} + u + \alpha \dot{u} (u^2 - 1) = 0$

bzw. $\dot{v} = -u$

$$\dot{u} = v - \alpha \left(\frac{u^3}{3} - u \right)$$

einziges Gleichgew. zust. $u = v = 0$

3.9 Ljapunov - Funktionen

Sei $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ isoliertes Gleichgew. von $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

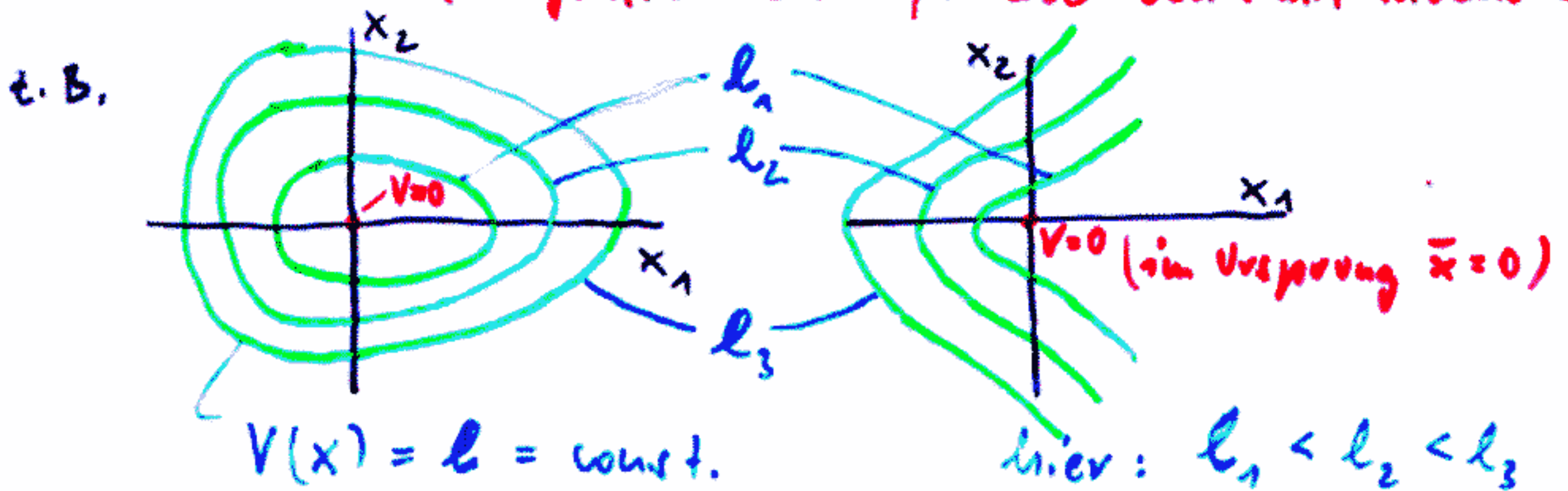
nichtlin. System, definiert für alle $x \in U \subseteq \mathbb{R}^2$

V sei glatte skalare Funktion, definiert auf U , so daß

$$V(\bar{x}) = 0 \quad \text{und} \quad V(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \neq \bar{x}$$

$V(x) = l > 0$ ist eine Niveaulinie in U

(Projektion einer 'Scheibe' von V mit Niveau l)



Ω offene Umgebung um \bar{x} ; $\Omega \subset U$

$\Omega_0 \subset \Omega$ (kleine) Nachbarumgebung von \bar{x} ,
für die $V(x) < l$

Annahme: Orbits kreuzen niemals eine Niveaulinie
von innen nach außen

Dann gilt: Wenn ein Orbit in Ω_0 beginnt, so bleibt
er darin 'gefangen', bleibt also auch in Ω ;
Daher ist \bar{x} stabil

V ist Ljapunov-Funktion! ; Bedingungen
(Beispiel: Gesamtenergie)

$$(\dot{V} \leq 0)$$

Bsp. harmonischer Oszillator

$$\ddot{\rho} + \omega^2 \rho = 0 \quad \text{bzw. mit } x_1 = \rho, \quad x_2 = \dot{\rho}$$

$$(3.13) \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 \end{aligned} \right\} \text{ mit } \bar{x} = 0 \text{ Gleichgew.}$$

wir wählen: $V(x_1, x_2) = E_{\text{gesamt}} = \frac{x_2^2}{2} + \frac{\omega^2 x_1^2}{2}$

- V ist def. für alle $x \in \mathbb{R}^2$
- V ist positiv außer für $\bar{x} = 0$
- Kurven $V = \text{const.}$: konzentrische Ellipsen in (x_1, x_2) -Ebene bzw $(\rho, \dot{\rho})$ -Phasenebene
- je geringer Gesamtenergie, desto kleinere Ellipse

entlang einer Trajektorie $x(t)$ gilt

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \omega^2 x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$$

(Kettenregel) mit (3.13):

$$\dot{V} = 0$$

folgt:

jeder Orbit von (3.13) ist begrenzt durch eine Niveaulinie von V ; V ist nichtwachsend (hier const.) entlang jeder Trajektorie des Systems

allgemeiner: $\dot{V} \leq 0$ (Beweis siehe Buch)

es gibt viele Ljapunov-Funktionen für ein System

$\dot{V} = 0$ konservatives System
 $\dot{V} < 0$ dissipatives System

noch ein Bsp: Feder-Masse-System

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega^2 z = 0 \quad \text{bzw.}$$

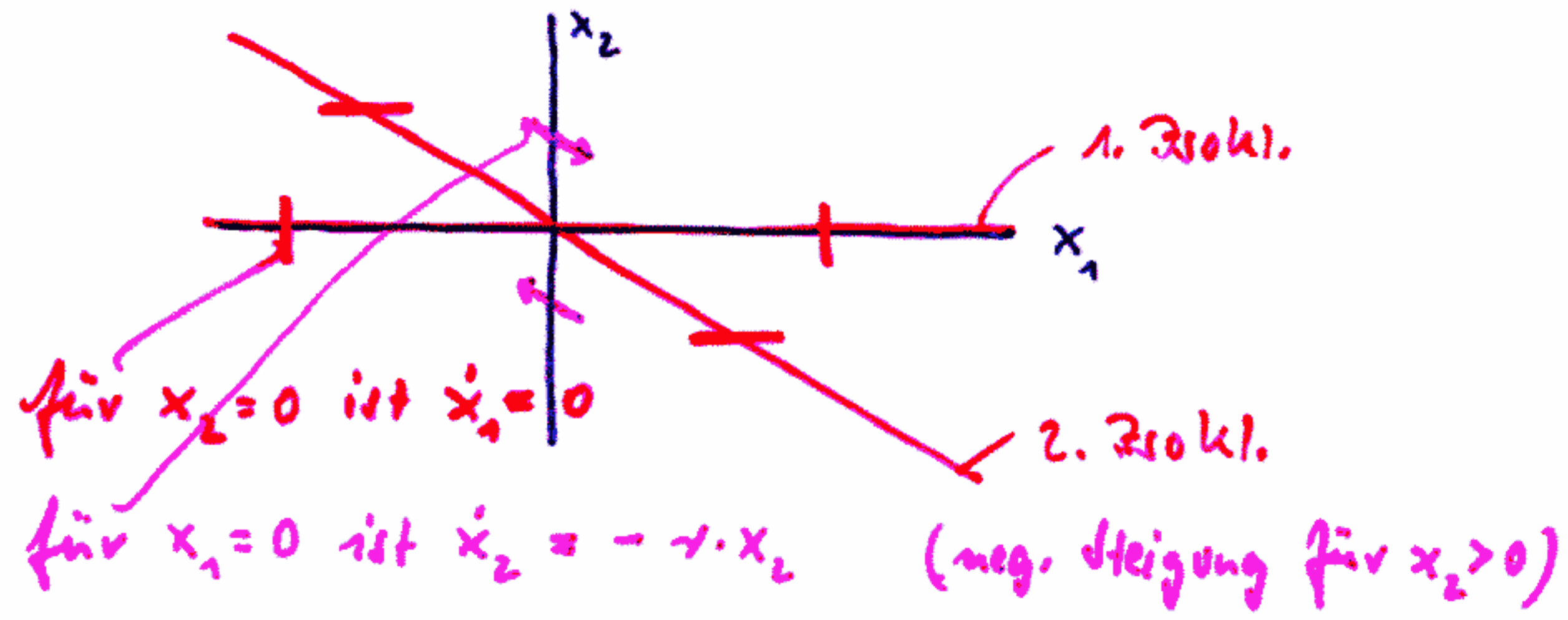
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 - \gamma x_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ljapunov-Fkt: Gesamtenergie im ungedämpften Fall

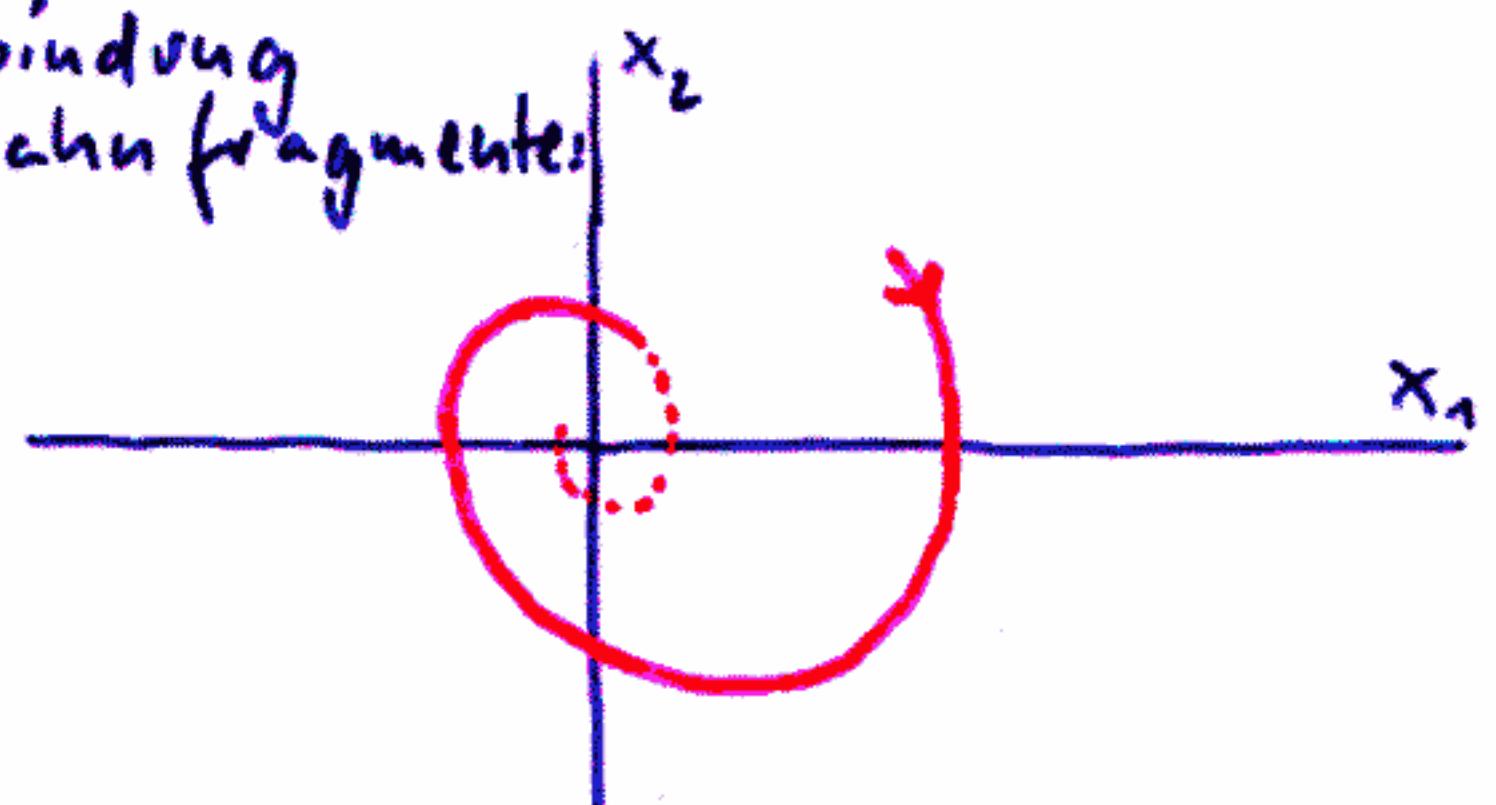
$$V(x) = \frac{x_2^2 + \omega^2 x_1^2}{2} \quad \rightarrow \text{Ellipsen um } \bar{x} = 0$$

graphische Methode: Isoklinen ($\dot{x}_i = 0$)

- 1. Isokline $\dot{x}_1 = 0$: $x_2 = 0$
- 2. Isokline $\dot{x}_2 = 0$: $x_2 = -\frac{\gamma}{\omega^2} x_1$



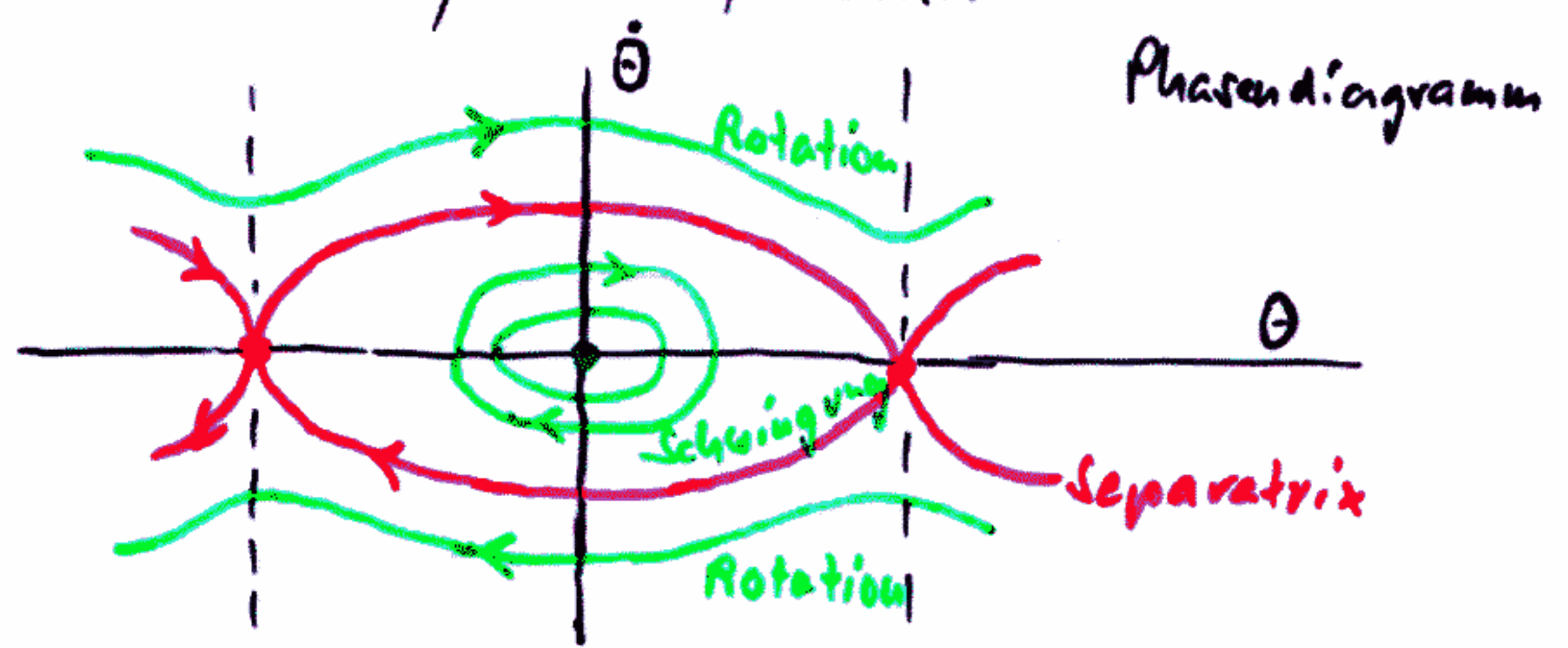
durch Verbindung solcher Bahnfragmente:
Orbit



Ursprung ist asymptotisch stabiles Gleichgewicht
für $\gamma > 0$ ist $\dot{V} < 0$

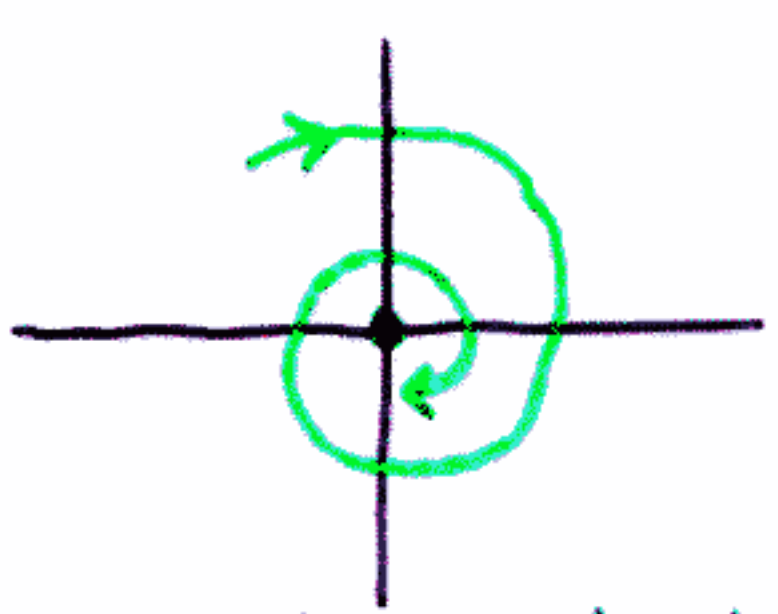
Wdh. Stabilitätsanalyse

a) konservatives System / Pendel

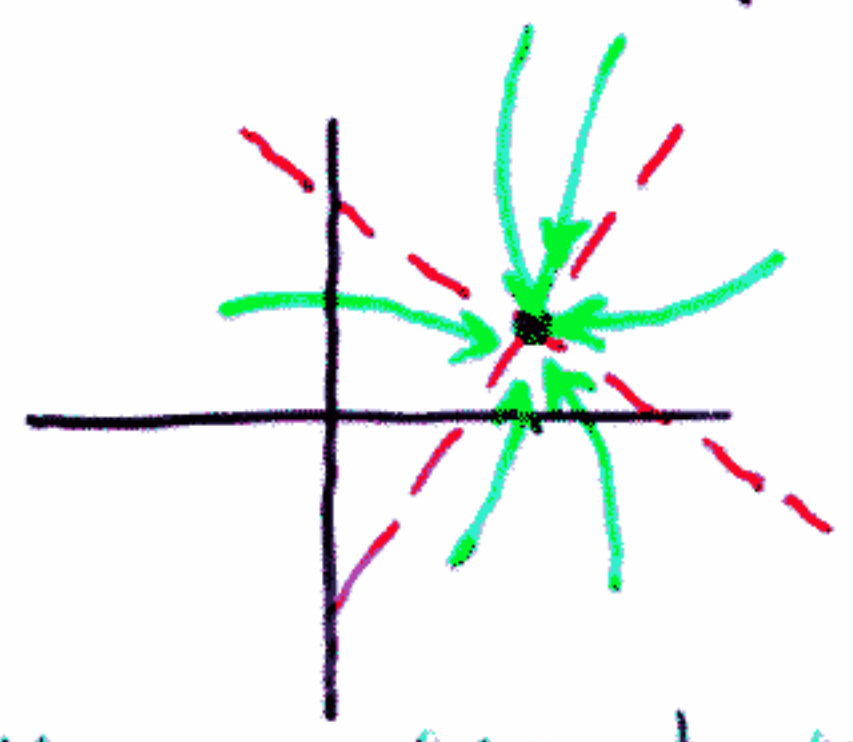


- stabiles Gleichgewicht (neutral stabil)
(elliptischer Fixpunkt / Wirbel)
- instabiles Gleichgewicht
(hyperbolischer Fixpunkt / Ihr Textfallpunkt)

b) dissipatives System (mit Dämpfung)



asymptotisch stabiler Fokus

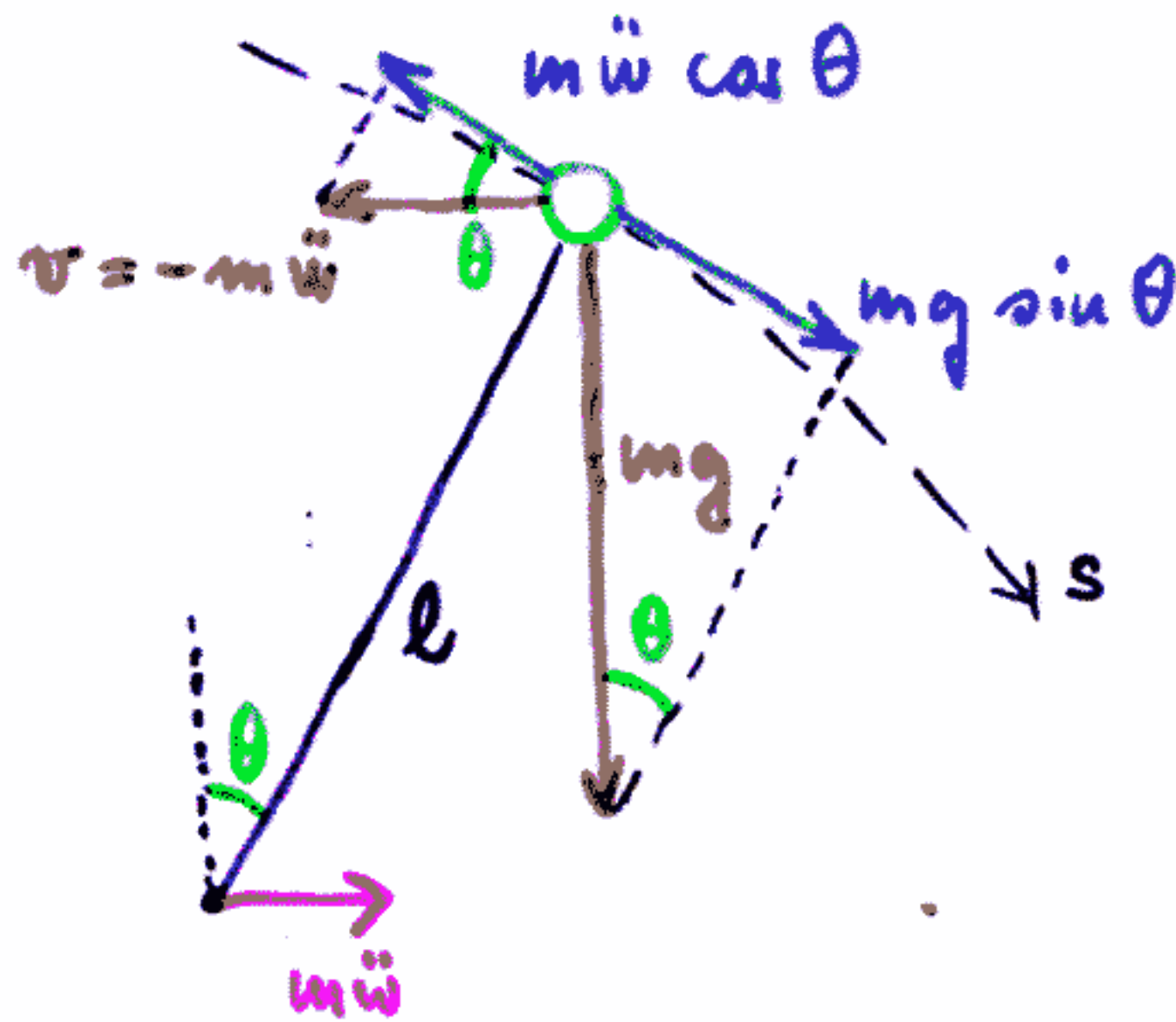


asympt. stab. Knoten

in beiden Fällen: nulldimensionaler Punkt-Attraktor

3.10 Rückkopplung und Steuerbarkeit

statt Pendel am Faden, das in senkrechter Pos. instabil:
jetzt Stock mit Gewicht, der durch seitliche Bewegung
im senkrechten Gleichgewicht gehalten werden soll



Kraftdiagramm

Dämpfung

Bewegungsgleichung: $m \ddot{s} = mg \sin \theta - k_1 \dot{s} - m \ddot{w} \cos \theta$

es gilt $\ddot{s} = L \ddot{\theta}$, $\dot{s} = L \dot{\theta}$; sei $r = k_1/m$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{\ddot{w}}{L} \cos \theta - r \dot{\theta}$$

Umkehrschreibung in System 1. Ordnung

mit $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -r x_2 - \frac{\ddot{w}}{L} \cos x_1 + \frac{g}{L} \sin x_1$$

Ansatz $v = -m \ddot{w} = c_1 x_1 + c_2 x_2$
 $= c_1 \theta + c_2 \dot{\theta}$

Frage: Wie sollen c_1 und c_2 gewählt werden, damit Gleichgewicht $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ asymptotisch stabil?

Lösungsweg: Linearisiertes System um \bar{x} mit Abweichungen $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ aufstellen

führt auf System $\dot{u} = Au$

Forderung $\det A > 0$, $\text{spur } A < 0$

ist erfüllbar mit $c_1 = -(l+g)$
 $c_2 = l(-1-a)$

↑ feedback - control / Ein-Teilchen-System

jetzt: 2-Spezies (Arten) - System

3.11 Räuber - Beute System

Vorbereitung: N sei Anzahl Individuen

$$\dot{N} = r N \text{ reines Wachstum}$$

$$N(t) = N(0) e^{rt}$$

$$\dot{N} = r N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \text{ begrenztes Wachstum}$$

$K = \text{Sättigungswert}$
(Nische)

$$N(t) = \frac{K}{1 + c e^{-rt}}$$

Nebenbemerkung: Zeit diskret $N(i\Delta t) = N_i$

$$\frac{N((i+1)\Delta t) - N(i\Delta t)}{\Delta t} = r N(i\Delta t) \left(1 - \frac{N(i\Delta t)}{K}\right)$$

bzw. mit $\Delta t = 1$ (Periode)

$$N_{i+1} = N_i + r N_i \left(1 - \frac{N_i}{K}\right)$$

Randbemerkung: Fibonacci - Zahlen

$$F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \quad / \text{System mit 'Gedächtnis'}$$

(Leonardo von Pisa: Kanarienvogel - Vermehrung,
 $F_0 = F_1 = 1$)

jetzt 2 Spezies:

Beute: hat limitierte Nahrungsquelle
und ist Nahrung für Räuber

N_1

Räuber: stirbt ohne Beute aus
und ernährt sich (vermehrt sich) von Beute

N_2

$$\dot{N}_1 = r N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) - \alpha N_1 N_2$$

$$\dot{N}_2 = -c N_2 + \beta N_1 N_2$$

andere Situation: Wettbewerb zweier Populationen um gleiche Nahrungsquelle (endlich)

$$\dot{N}_1 = r N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) - \alpha N_1 N_2$$

$$\dot{N}_2 = s N_2 \left(1 - \frac{N_2}{L}\right) - \beta N_1 N_2$$

allgemeine Form:

$$\dot{N}_1 = N_1 (a_1 N_1 + b_1 N_2 + d_1)$$

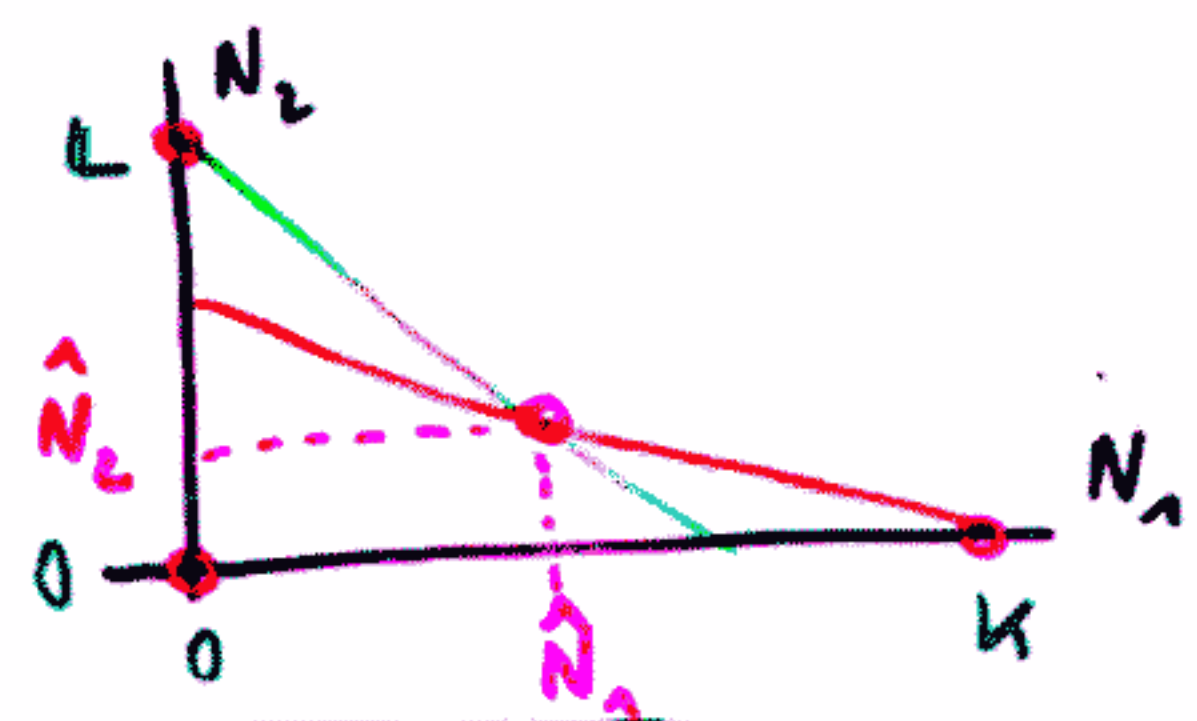
$$\dot{N}_2 = N_2 (a_2 N_1 + b_2 N_2 + d_2)$$

quadrat. Modell

Gleichgewichtspunkte bei Wettbewerb:

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{N}_1 \\ \hat{N}_2 \end{pmatrix}$$

Analyse mittels Isoklinen $\dot{N}_1 = 0, \dot{N}_2 = 0$



Systeme mit 2 Freiheitsgraden

/ Dgl.

z.B. $\dot{N}_1 = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2$

$$\dot{N}_2 = \beta_2 N_1 N_2 - \alpha_2 N_2$$

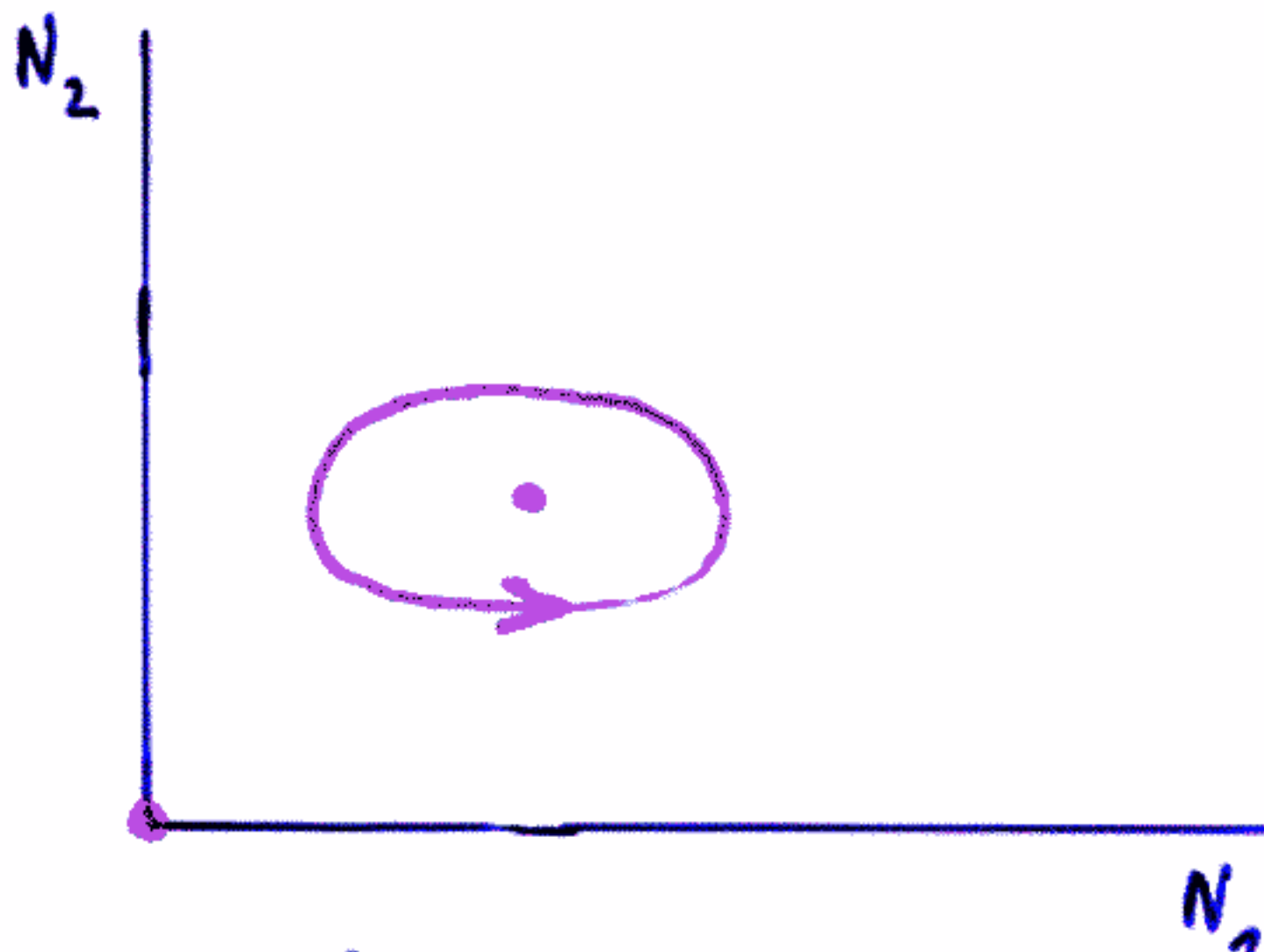
Räuber - Beute

predator - prey

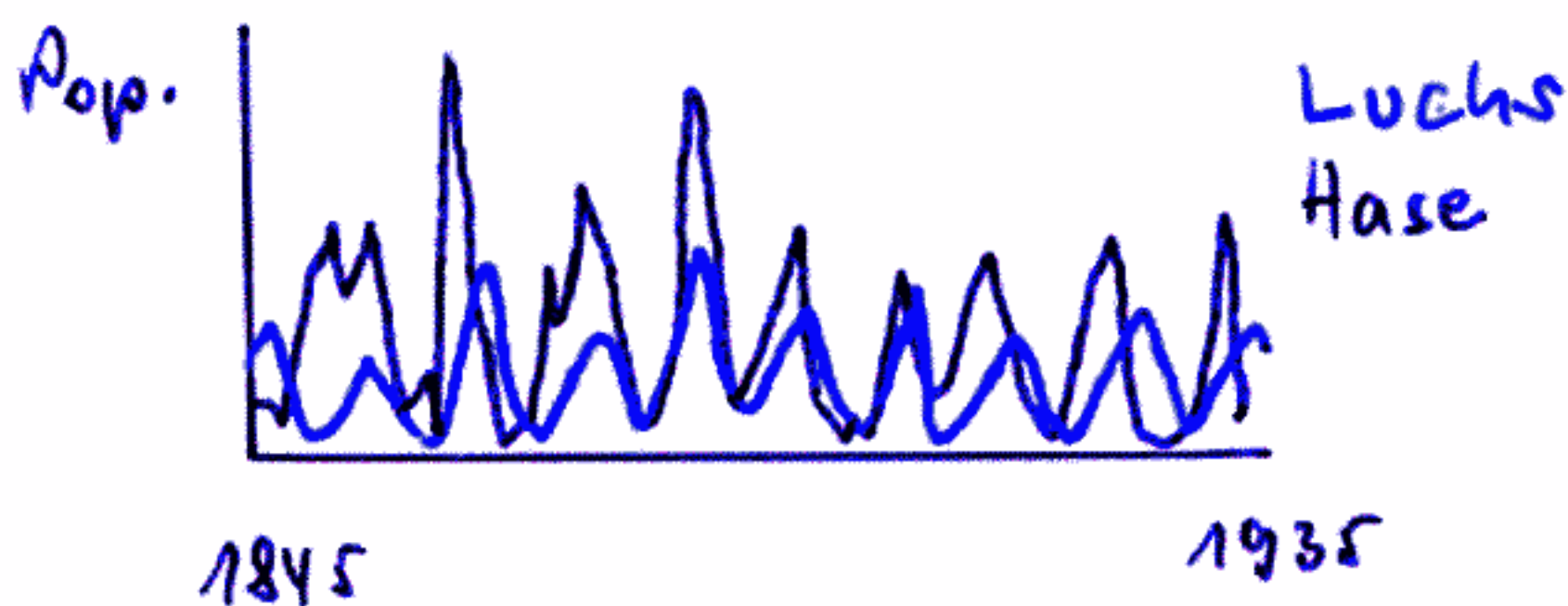
competition

Lotka, Volterra

~ 1925



- beide Populationen sterben aus
- Grenzzyklus



4. Chaotik (deterministische!)

Stabilität ≠ Stabilität

bisherige Betrachtungen: Stabilität von Gleichgewichten

genauer: Endzustand von Trajektorien

nur in Abhängigkeit von Anfangszustand

4.1 strukturelle Stabilität / Bifurkation

bis ~ 1950 galt, Stabilitäts-Dogma!

d.h. math. Modelle, die strukturelle Zustabilität aufweisen, haben nichts mit der Realität zu tun

es geht um: Verhaltensabhängigkeit von Modellparametern (bisher konstant)

Bsp. $\dot{x} = f(x, \lambda, \mu) = -x^3 + \lambda x + \mu$
Parameter: λ, μ

stationäre Zustände (Fixpunkte) $\dot{x} = 0$

$$-x^3 + \lambda x + \mu = 0$$

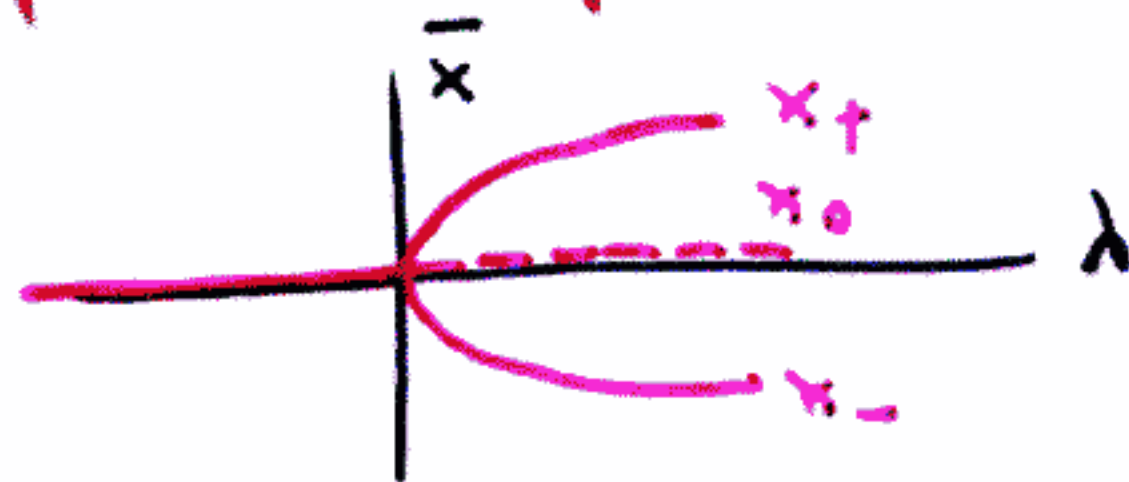
a) $\mu = 0$

1. Lösung $\bar{x} = 0$ / trivial x_0

weitere Lösungen: $-\bar{x}^2 + \lambda = 0$

$$\bar{x} = \pm \sqrt{\lambda} \quad x_{\pm}$$

für $\lambda = 0$ fallen beide Lösungen zusammen



(Gabel-) Bifurkation

$\bar{x}=0$ ist für $\lambda < 0$ global asymptotisch stabil

(läßt sich mit unserer Standardmethode nachweisen)

für $\lambda > 0$ ist $\bar{x}_0=0$ instabil

sind \bar{x}_{\pm} asymptotisch lokal stabil
(nicht global)

d.h. beim Übergang $\lambda=0$ ändert sich qualitatives
Verhalten des System-Modells

Widerspruch zum Stabilitäts-Dogma!

Solche Modelle waren bis 1950 nicht 'erlaubt',

weil sie als 'unnatürlich' galten

[Katastrophentheorie]

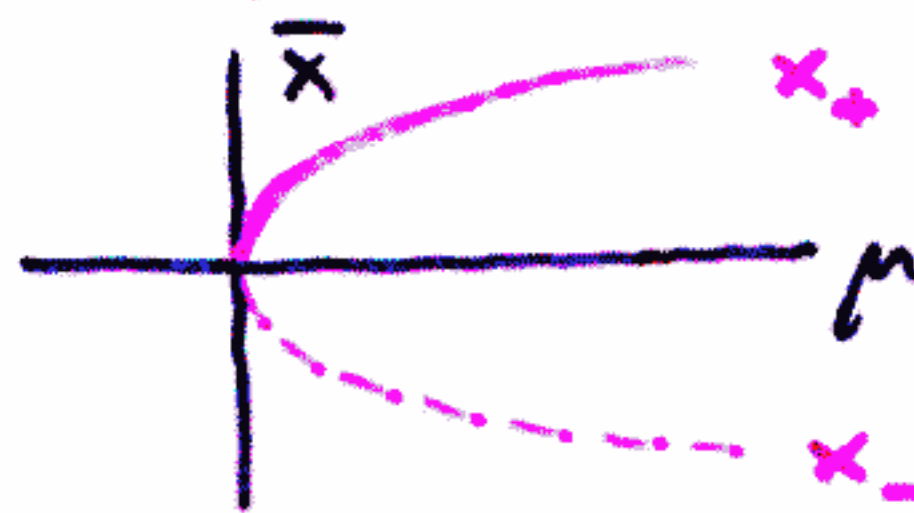
René Thom

b)

$$\dot{x} = -x^2 + \mu$$

Fixpunkte

$$\bar{x} = \pm \sqrt{\mu}$$



stabiler Zweig

instabiler Zweig

(Grenzpunkt-) Bifurkation

c) Überlagerung von a) und b)

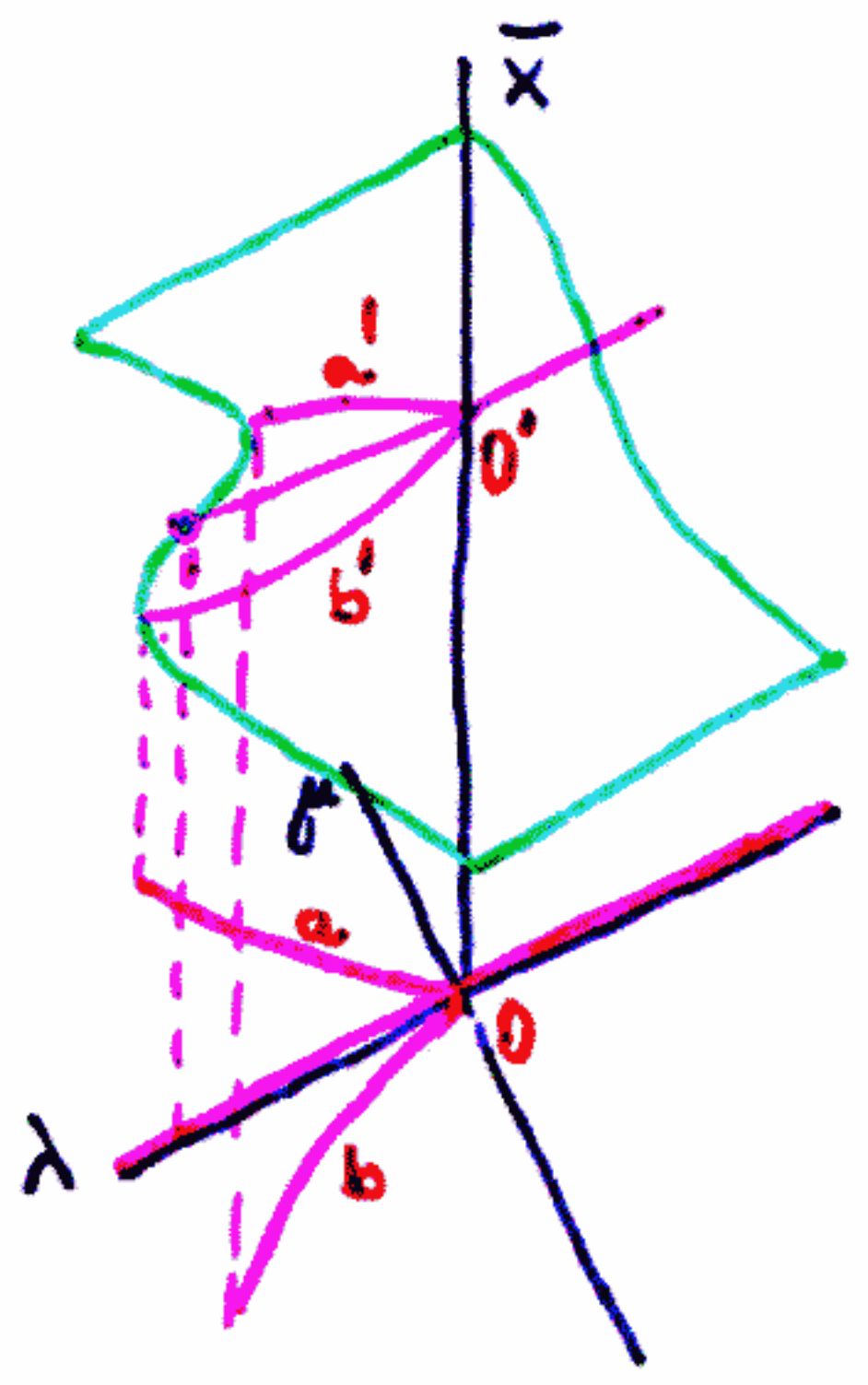
nach geeigneter Koordinatentransf.

zurück zu

$$\dot{x} = -x^3 + \lambda x + \mu$$

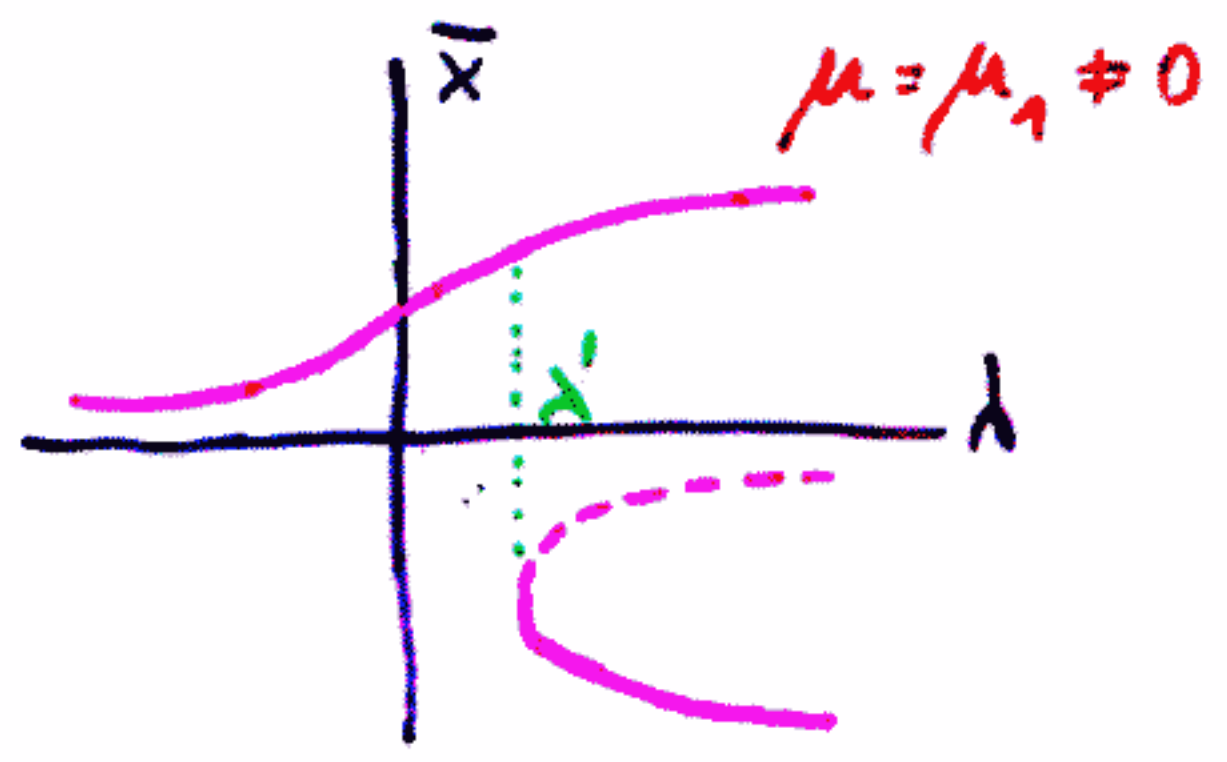
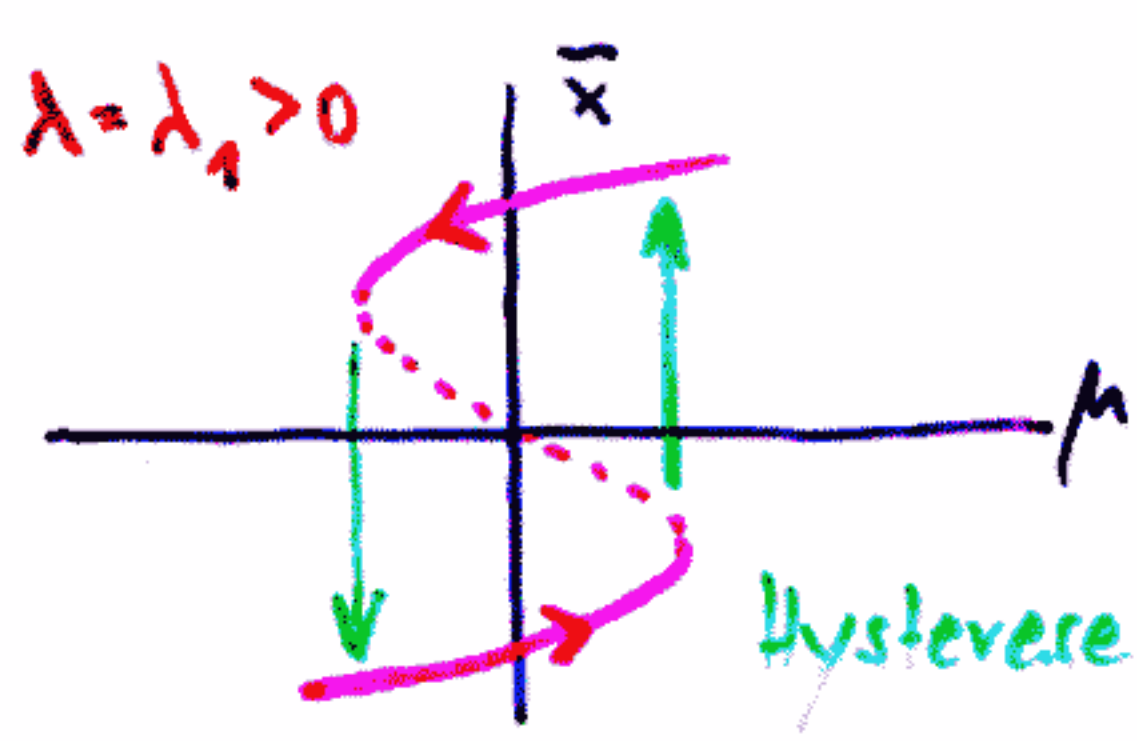
Fixpunktgleichung $-\bar{x}^3 + \lambda \bar{x} + \mu = 0$

kubische Gleichung (kanonische Form): bis zu 3 verschied. reelle Lösungen



Ursprung (O', Projektion O) bildet Spitzen-Singularität
 rechts davon ($\lambda < 0$) 1 Lösg.
 links davon ($\lambda > 0$) 3 Lösg.

fold catastrophe



Grenzkurve im (μ, λ) -Parameterraum zwischen den beiden Lösungsbereichen:

$$4\lambda^3 + 27\mu^2 = 0$$

4.2 Grenzzyklen

Zu dissipativen Systemmodellen mit Phasenraum-Dimension 2 gibt es außer Fokus, Knoten noch einen dritten Attraktortyp:

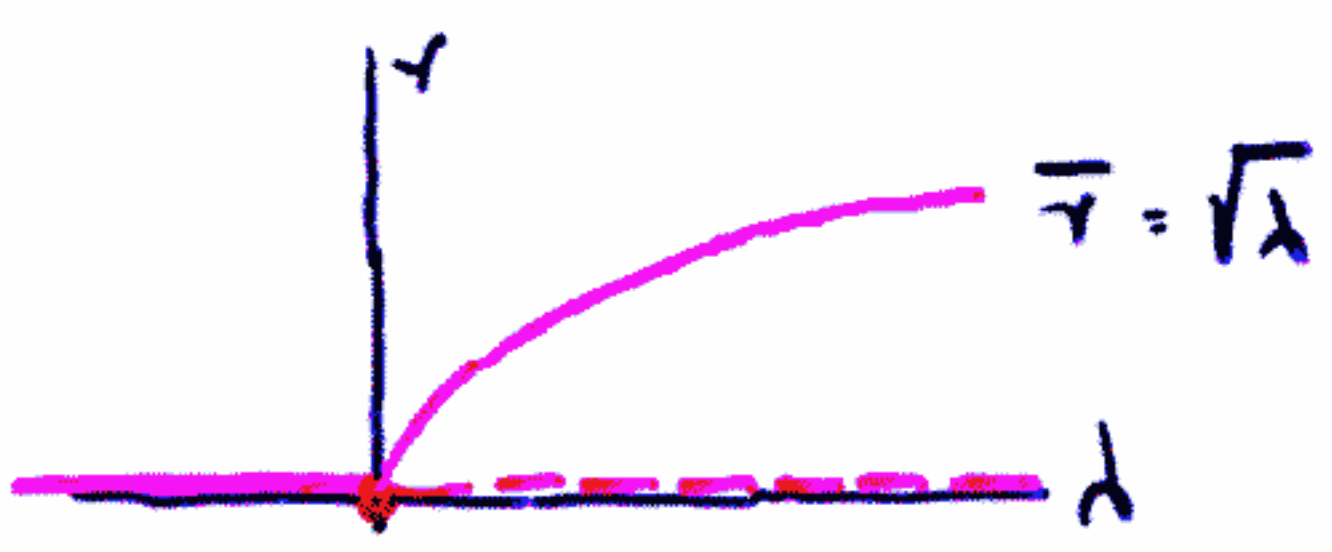


alle Bahnen münden in einen (stabilen) Grenzzyklus, der einen instabilen Fixpunkt P umgibt (entdeckt von Poincaré)

Bsp $x_1 = r \cos \varphi$; $x_2 = r \sin \varphi$ Transf.
 a) $\dot{r} = \lambda r - r^3$ $r > 0$
 b) $\dot{\varphi} = \omega$

aus b) folgt: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$

aus a) lassen s. Fixpunkte ermitteln:
 $\bar{r} = 0$ und $\bar{r} = \sqrt{\lambda}$

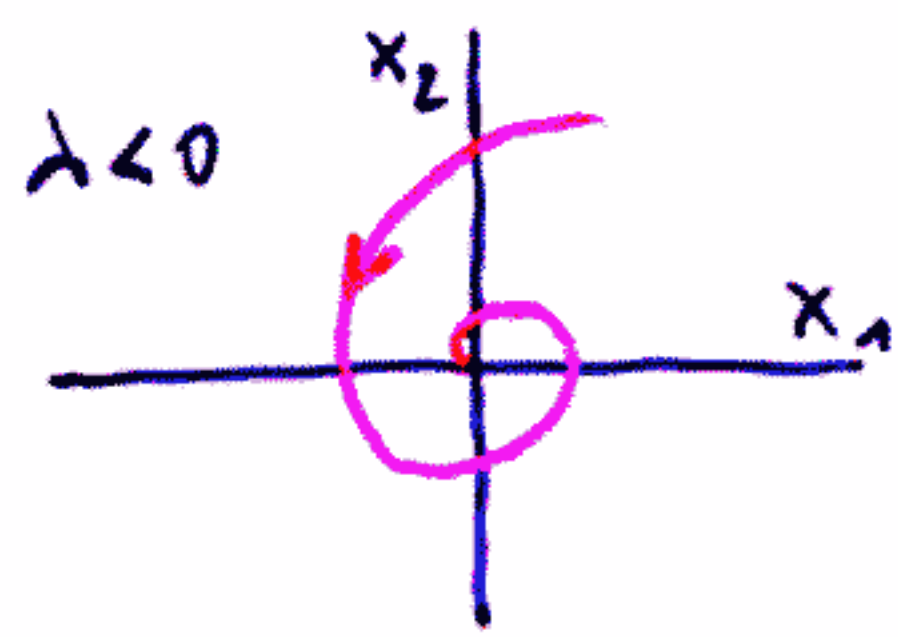


für $\lambda < 0$ ist $\bar{r} = 0$ (d.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) ein stabiler Fixpunkt

für $\lambda = 0$ wird dieser Fixpunkt instabil
 Hopf-Bifurkation

für $\lambda > 0$ ist $\bar{r} = 0$ instabil
 $\bar{r} = \sqrt{\lambda}$ stabil

d.h. x_1 konvergiert gegen $\sqrt{\lambda} \cos(\varphi_0 + \omega t)$
 x_2 $\sqrt{\lambda} \sin(\varphi_0 + \omega t)$
 das ist eine zeitabhängige Lösung!



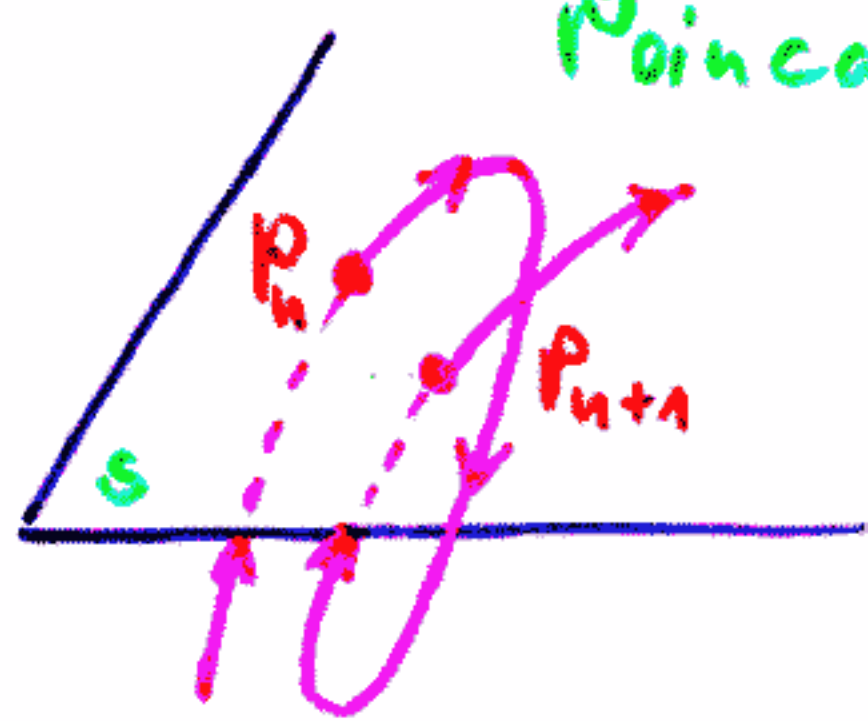
strukturell stabiles Phasenporträt

4.3 Phasenräume $n \geq 3$

Zwelche weiteren Phänomene treten auf neben Fixpunkten (Punkt-Attraktor) und Grenzzyklen (periodischer Attraktor)

Beobachtungstrick: niedrig dimensionale Projektionen!

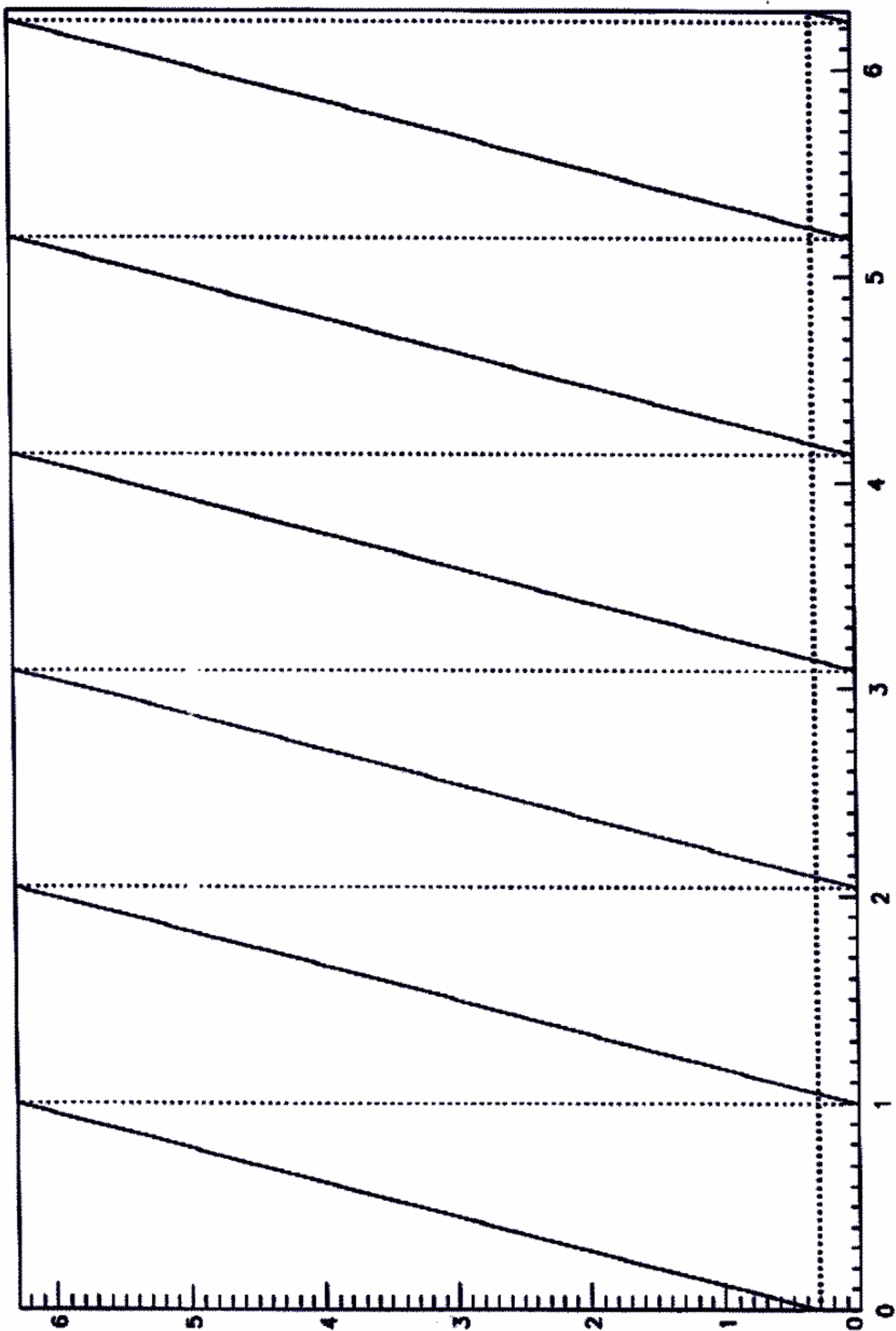
Poincaré-Schnitt s durch Phasenraum

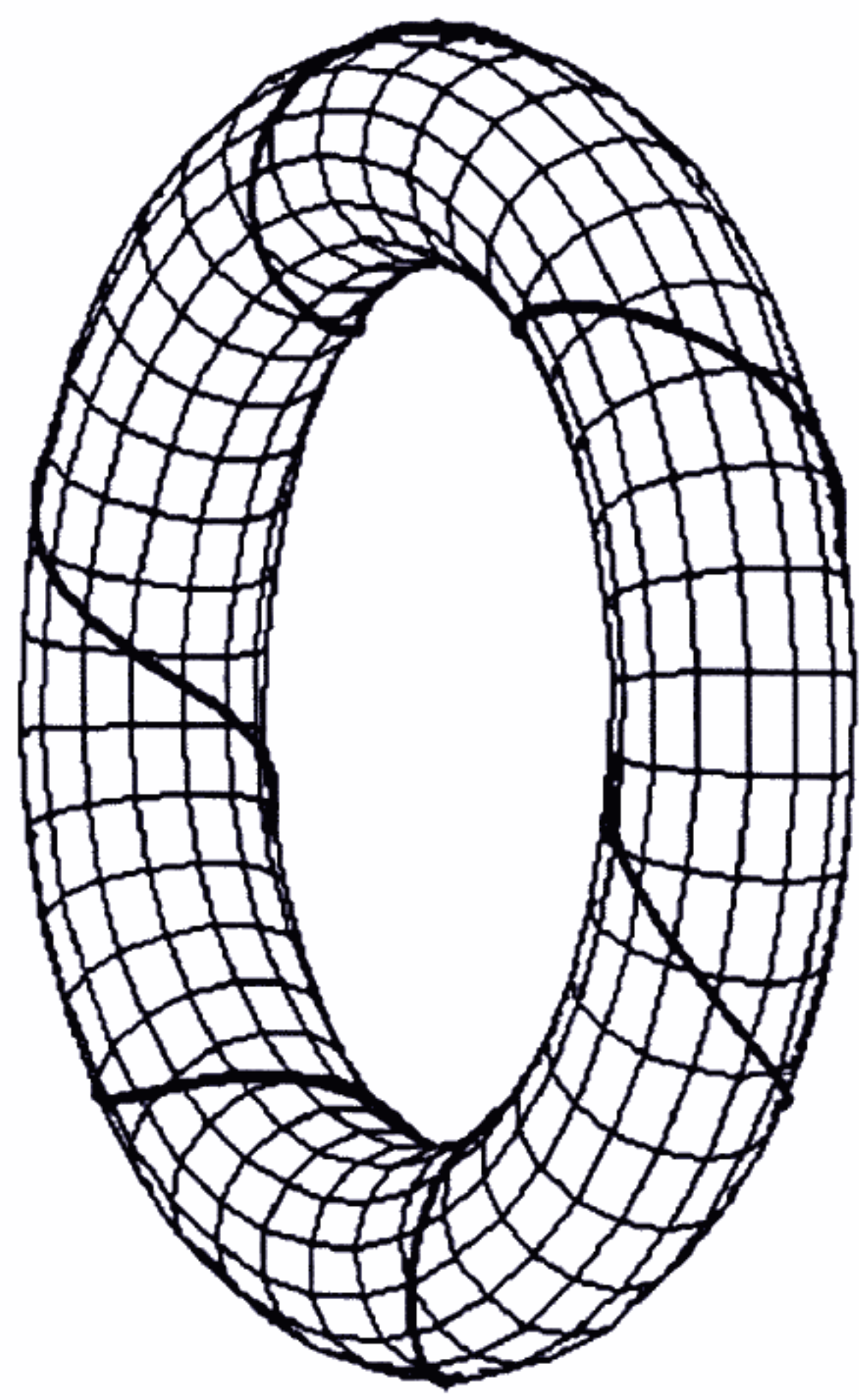


Dynamik der Durchstoßpunkte P_i

Poincaré-Abbildung

(oder: Dynamik der Minima/Maxima)



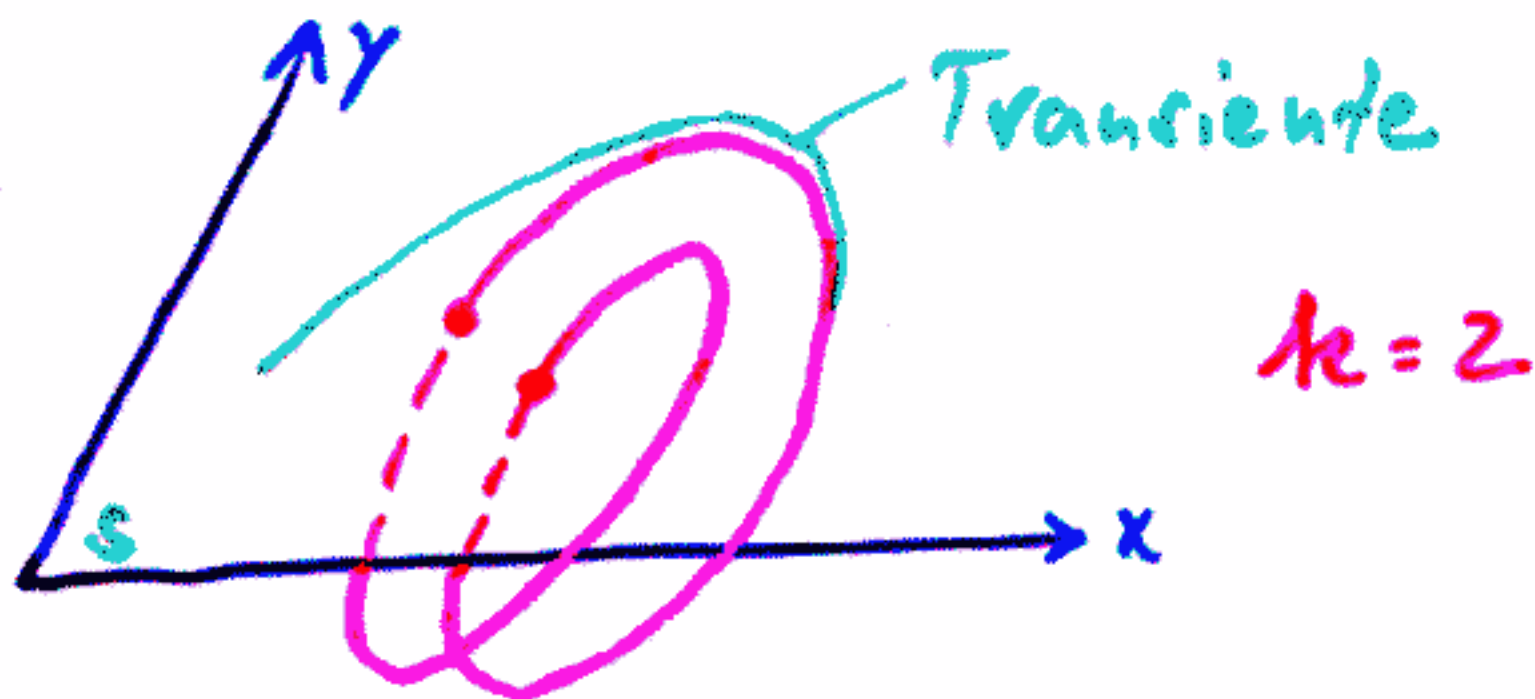


Seien x, y die Koordinaten der Schnitt-Ebene,
 so kann man diese Dynamik beschreiben mittels

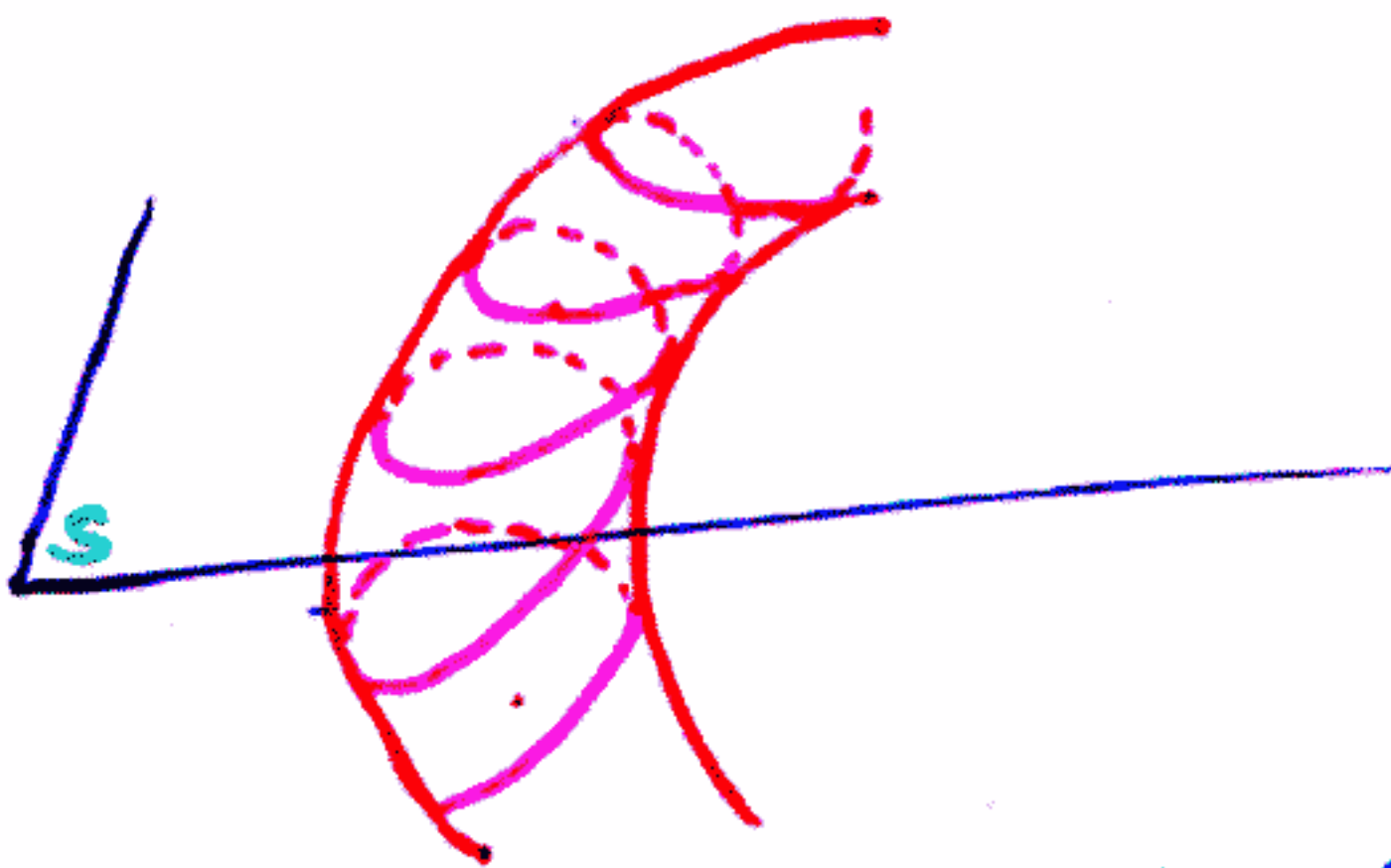
$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Rekurrenzrelation} \\ \text{(Wiederkehr-)} \end{array}$$

z. B. Grenzzyklus \rightarrow ein einziger Durchstoßpunkt

allgemeiner: k Durchstoßpunkte \rightarrow
 periodischer Attraktor: Zyklus der Ordnung k .



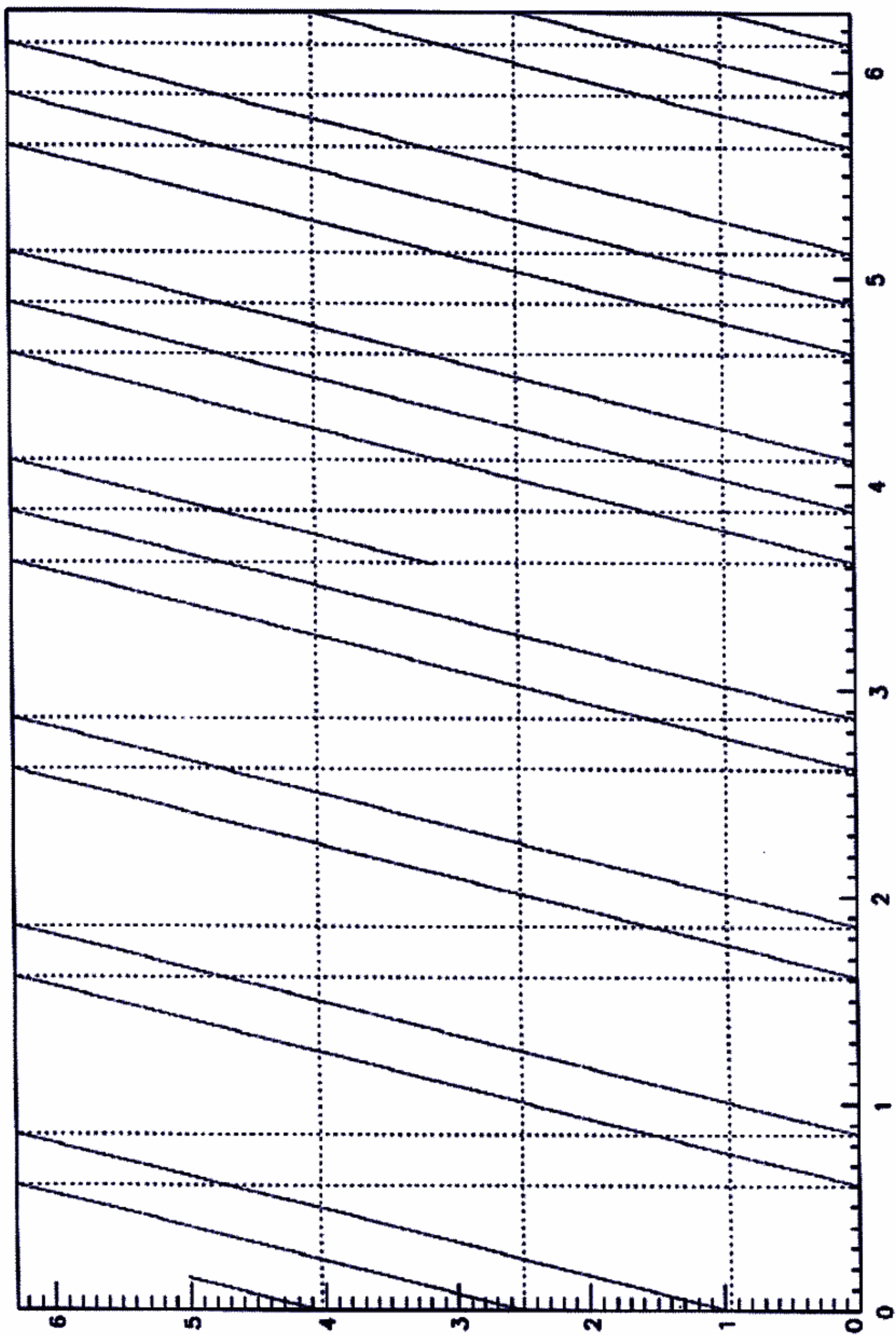
Weiteres Phänomen: quasiperiodischer Attraktor
 (invariante Tori)

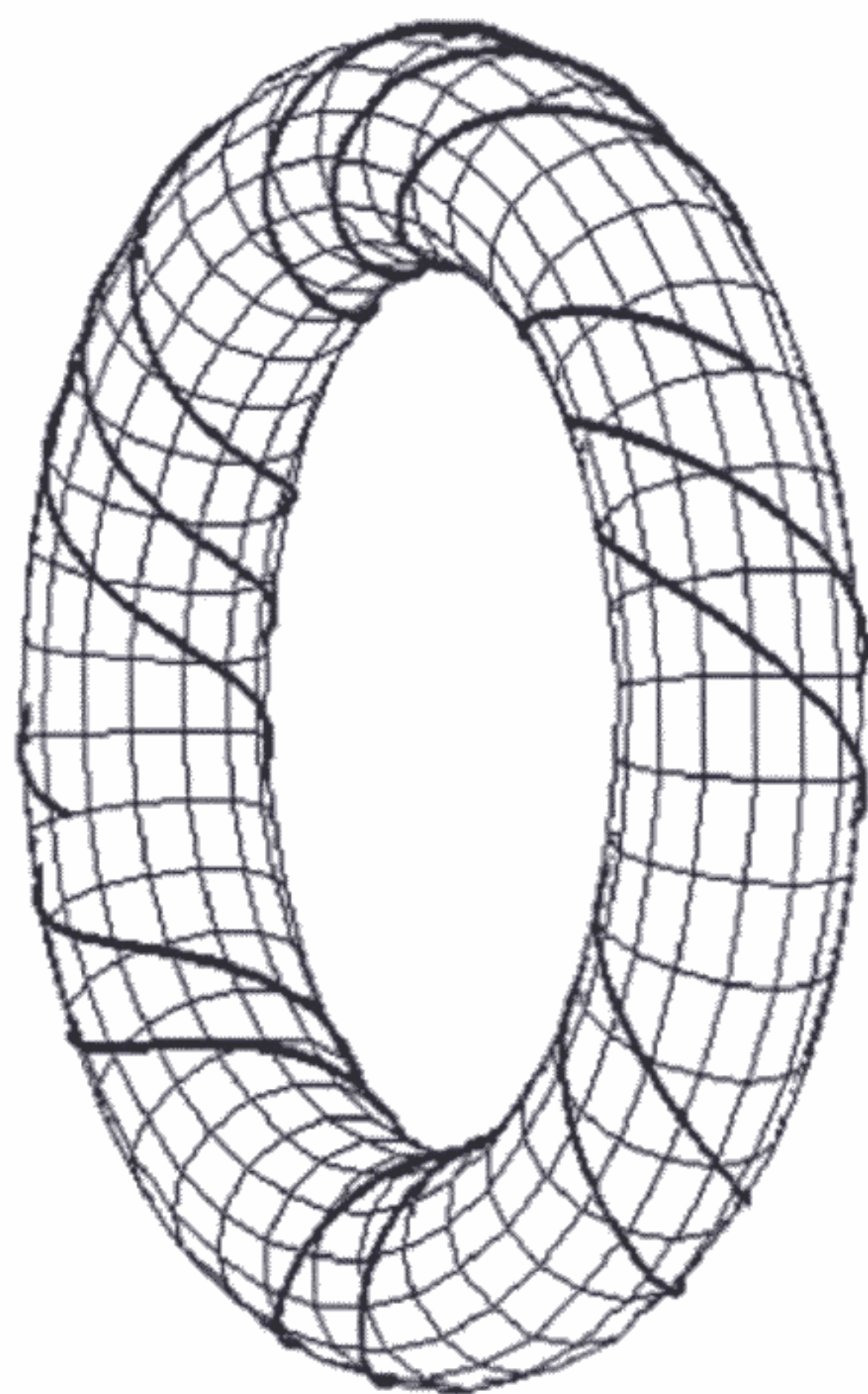


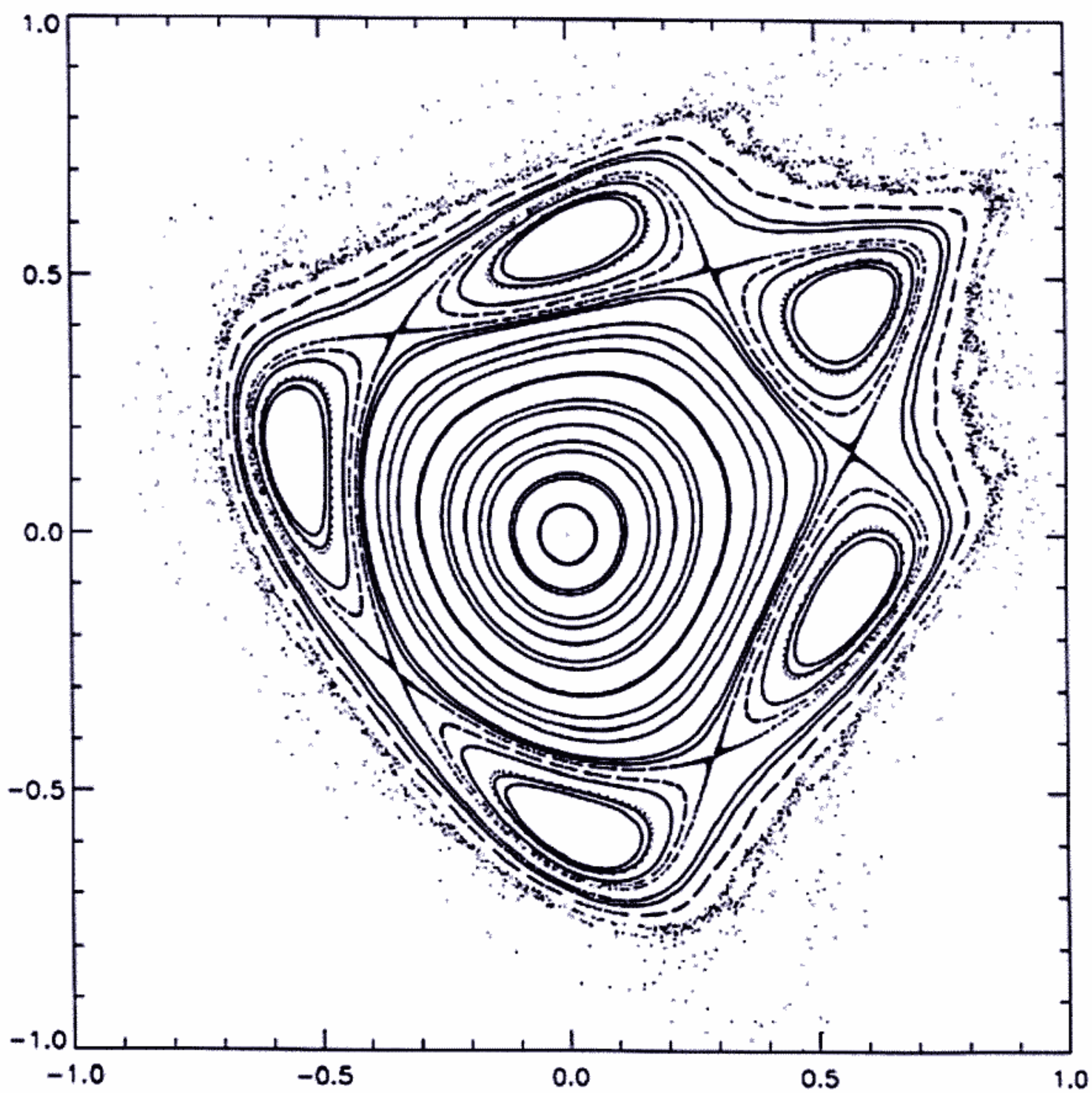
die P_i bilden eine
 geschlossene Kurve

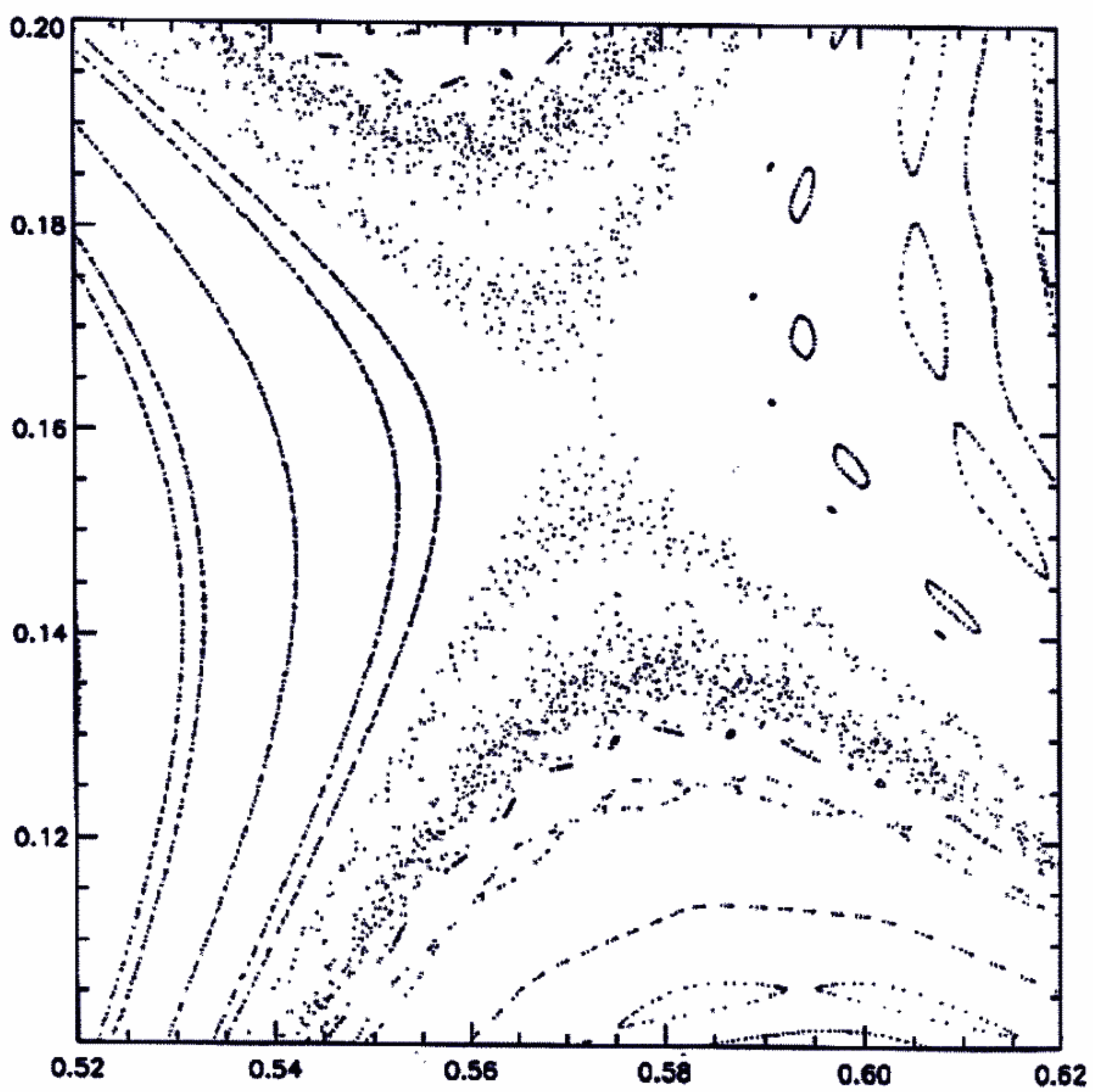
Bewegung auf Torus beschreibbar

auch: gefüllte Fläche
 durch 2 inkommensurable Frequenzen









4.4 seltsame Attraktoren (nichtperiodisch)

gibt es noch andere Poincaré-Muster außer Punkt,
Linie, Fläche?

Ja: Fraktale

[Benoit Mandelbrot]

Objekt	Dimension		
Punkt	0	← 0.63	fraktale Dimensionen
Linie	1	← 1.7	
Fläche	2		
.....			

→ neue Mathematik: deterministisches Chaos
nichtlineare Dynamik
fraktale Geometrie

z.B. Klimamodell von Lorenz

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\dot{y} = r x - y - x z$$

$$\dot{z} = x y - b z$$

σ, r, b sind
Modellparameter

System 3 gekoppelter nichtlin. Dgl.

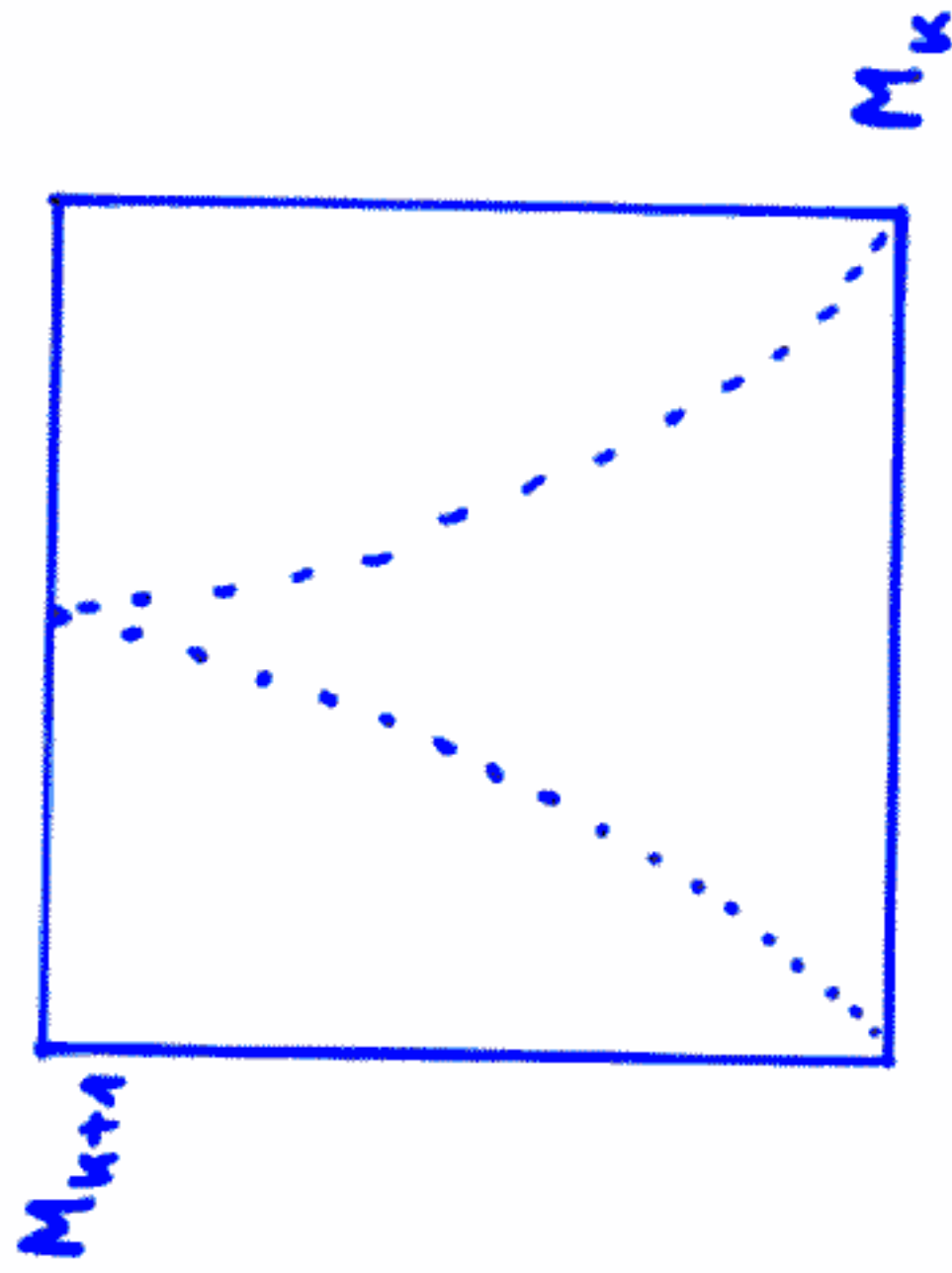
nach Linearisierung Untersuchung der Eigenwerte
der 3×3 Kopplungsmatrix A

λ_1	λ_2	λ_3	Phänomen	$\lambda = \lambda(\sigma, r, b)$
-	-	-	Fokus	
0	-	-	Grenzzyklus	
0	0	-	Torus	eigentlich
+	0	-	seltsamer Attraktor	(kein Chaos, komplexe Ordnung!)

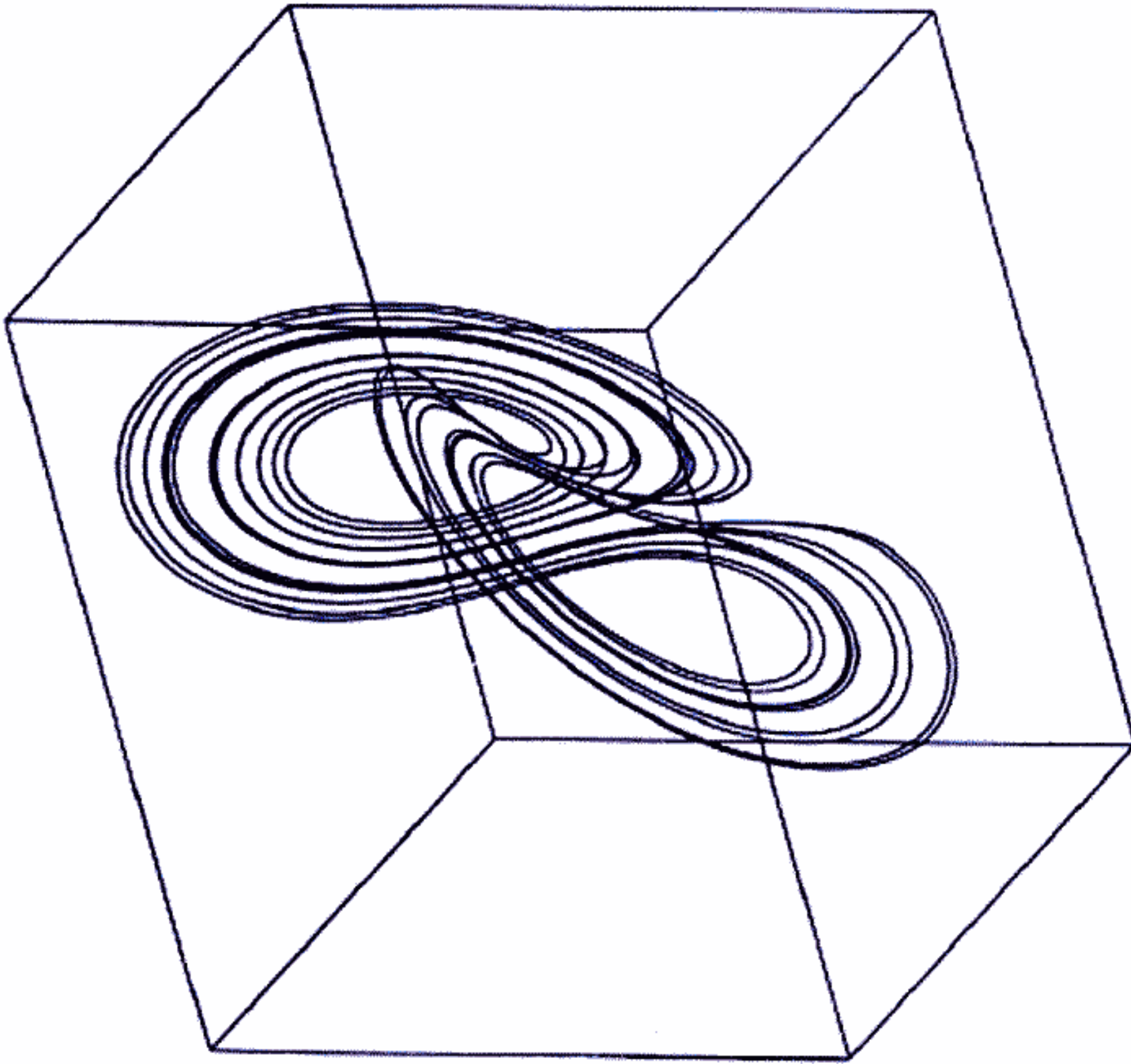
THETA= 120

PHI = 30

Auftragung sukzessiver
Maxima oder Minima



Lorenz - Abbildung



Lorenz - Attraktor

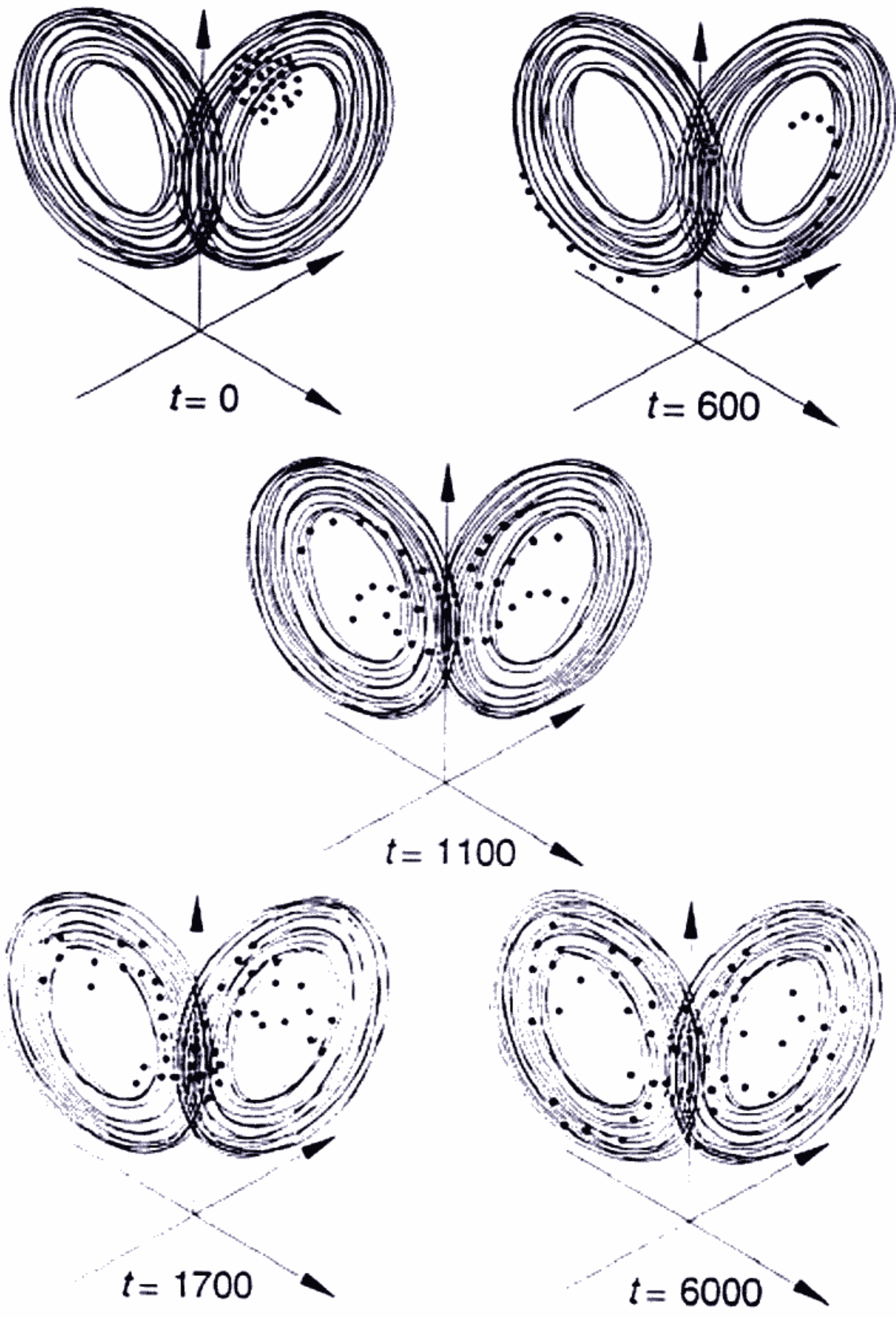


Abb. 3.11 Trajektoriebilder für den chaotischen Lorenzattraktor. Infolge der exponentiellen Divergenz der Trajektorien wird eine Wolke von zunächst benachbarten Zuständen sehr schnell über den ganzen Attraktor verstreut. Der genaue Zustand ist somit nach Verlauf einer gewissen Zeit kaum noch vorhersagbar.

4.5 Bifurkation in Zeitdiskreten Systemmodellen am Beispiel eines "begrenzten Wachstums"

Ausgangspunkt: kontinuierliches logistisches Wachstum

(A)
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = c y \left(1 - \frac{y}{a} \right)$$

\uparrow pos. \uparrow neg. Rückkopplung

Diskretisierung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = c y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{a} \right)$$

nach Umbenennung $y(t) := y_k$
 $y(t+\Delta t) := y_{k+1}$

und einfacher Transformation (neue Konstanten)

$$1 + c \Delta t := \tau$$

$$a \left(1 + \frac{1}{c \cdot \Delta t} \right) := s \quad \left| \begin{array}{l} \text{gesetzt} \\ s=1 \end{array} \right.$$

führt zu

(B)
$$y_{k+1} = \tau y_k \left(1 - \frac{y_k}{s} \right)$$

wobei $0 < y_k < 1$

Verhulst
1845

? Zeitverhalten (Orbit, Trajektorie)

abh. von y_0 und τ

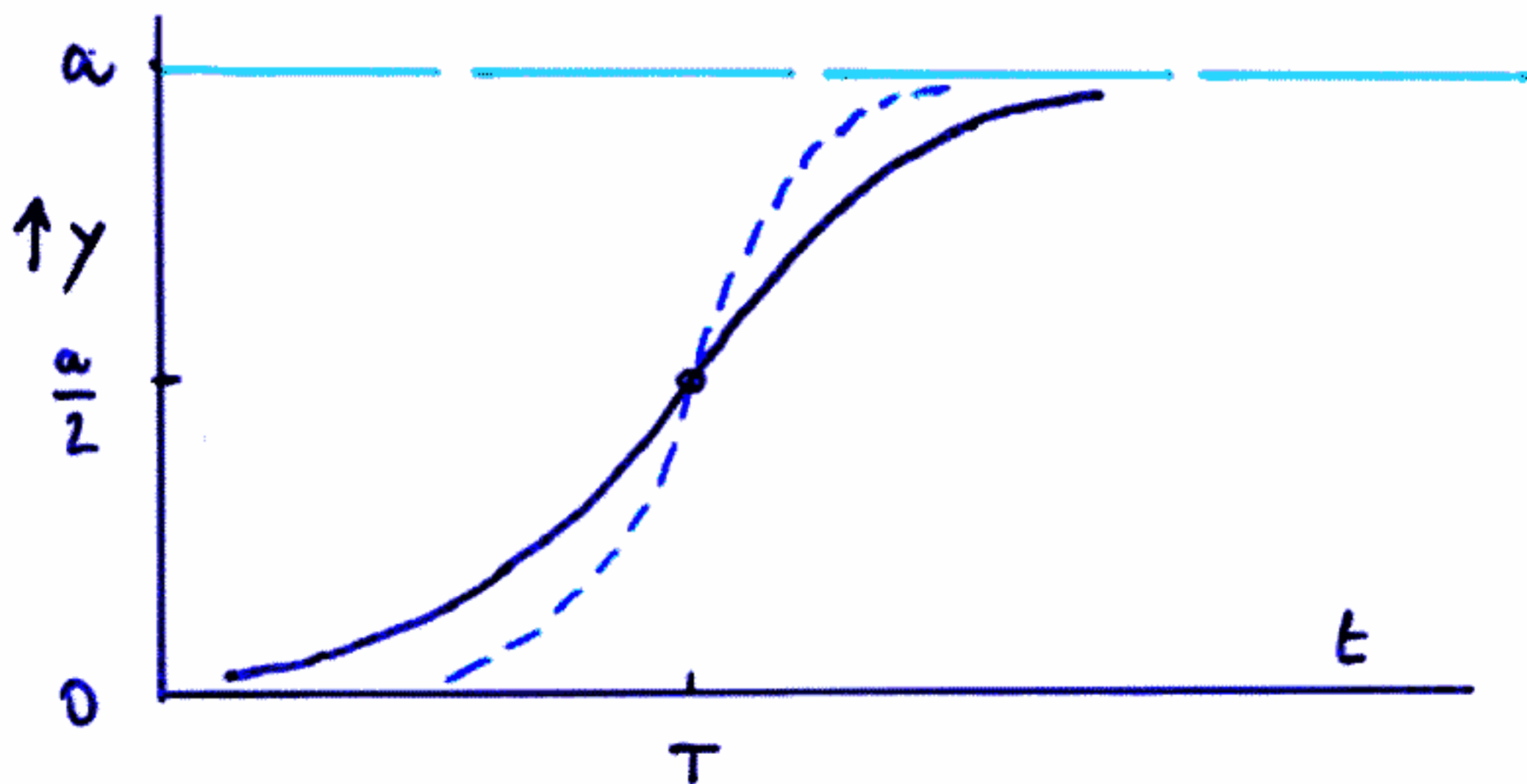
nichtlinear dynamische Modelle

1.) Zeit kontinuierlich \rightarrow Dgl.

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

Integration:

$$y(t) = \frac{a}{1 + e^{-c(t-T)}}$$



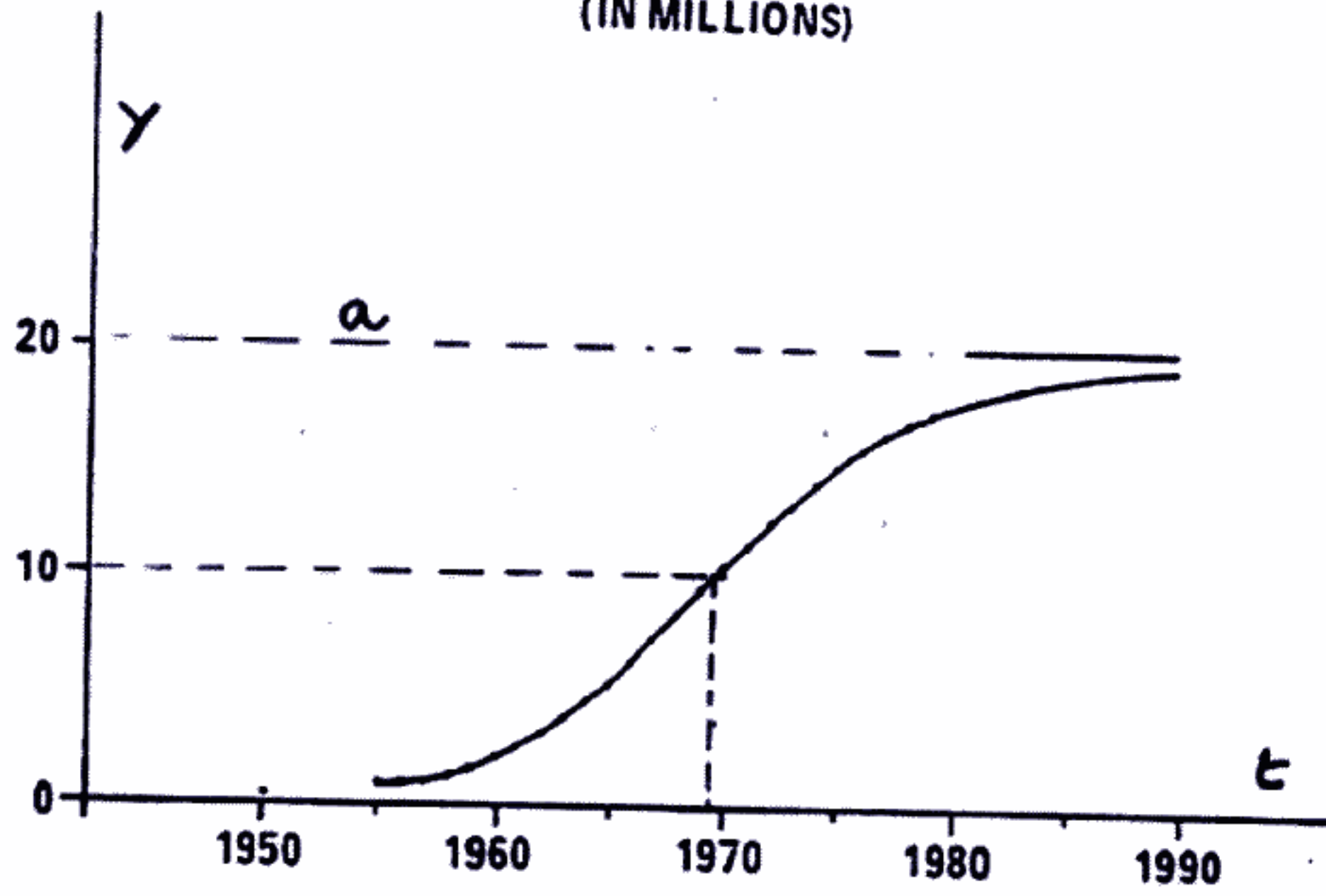
logistisches Modell (a, c, T)

Ökologie: Population in Nische

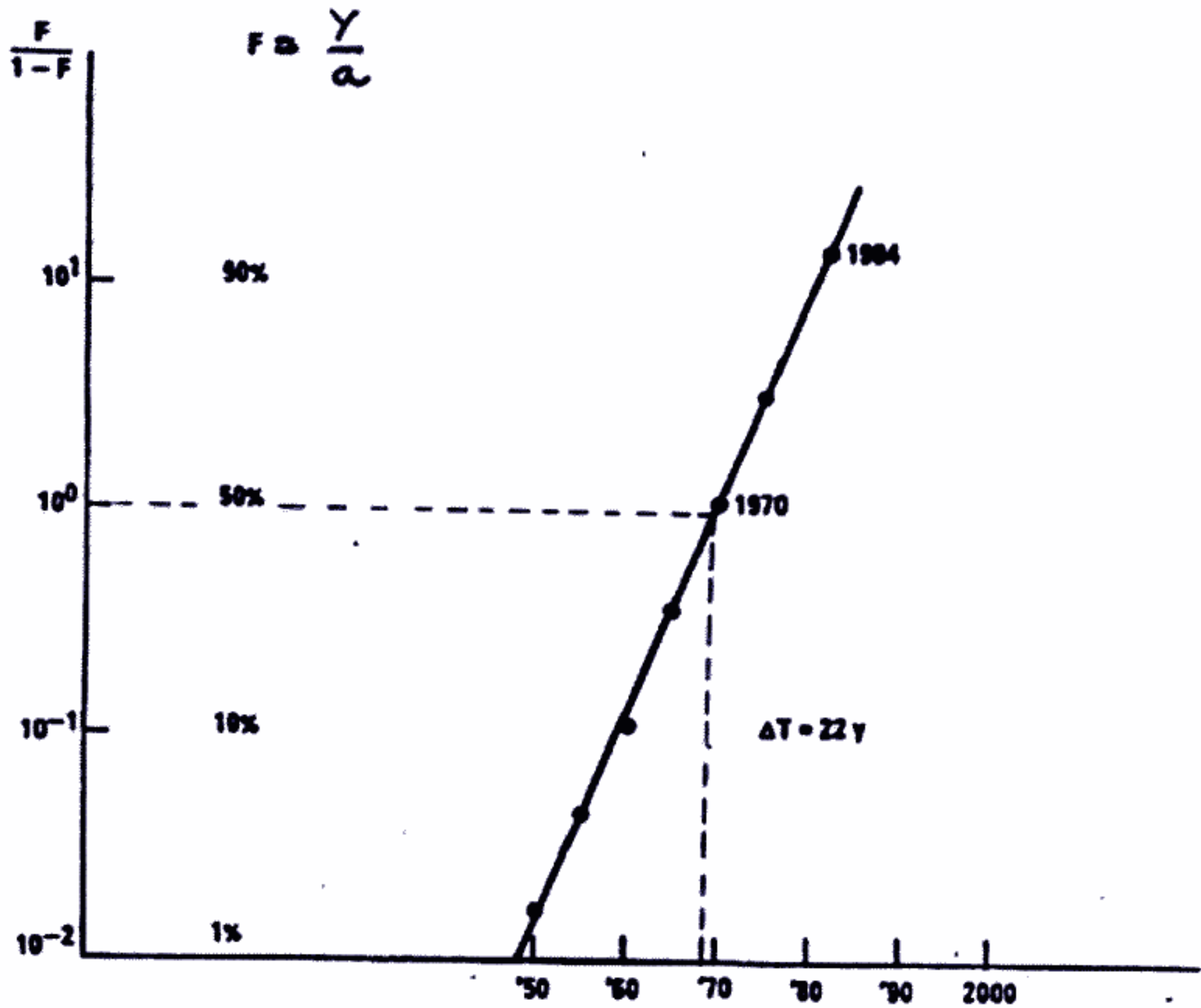
Wirtschaft: Markt-Durchdringung

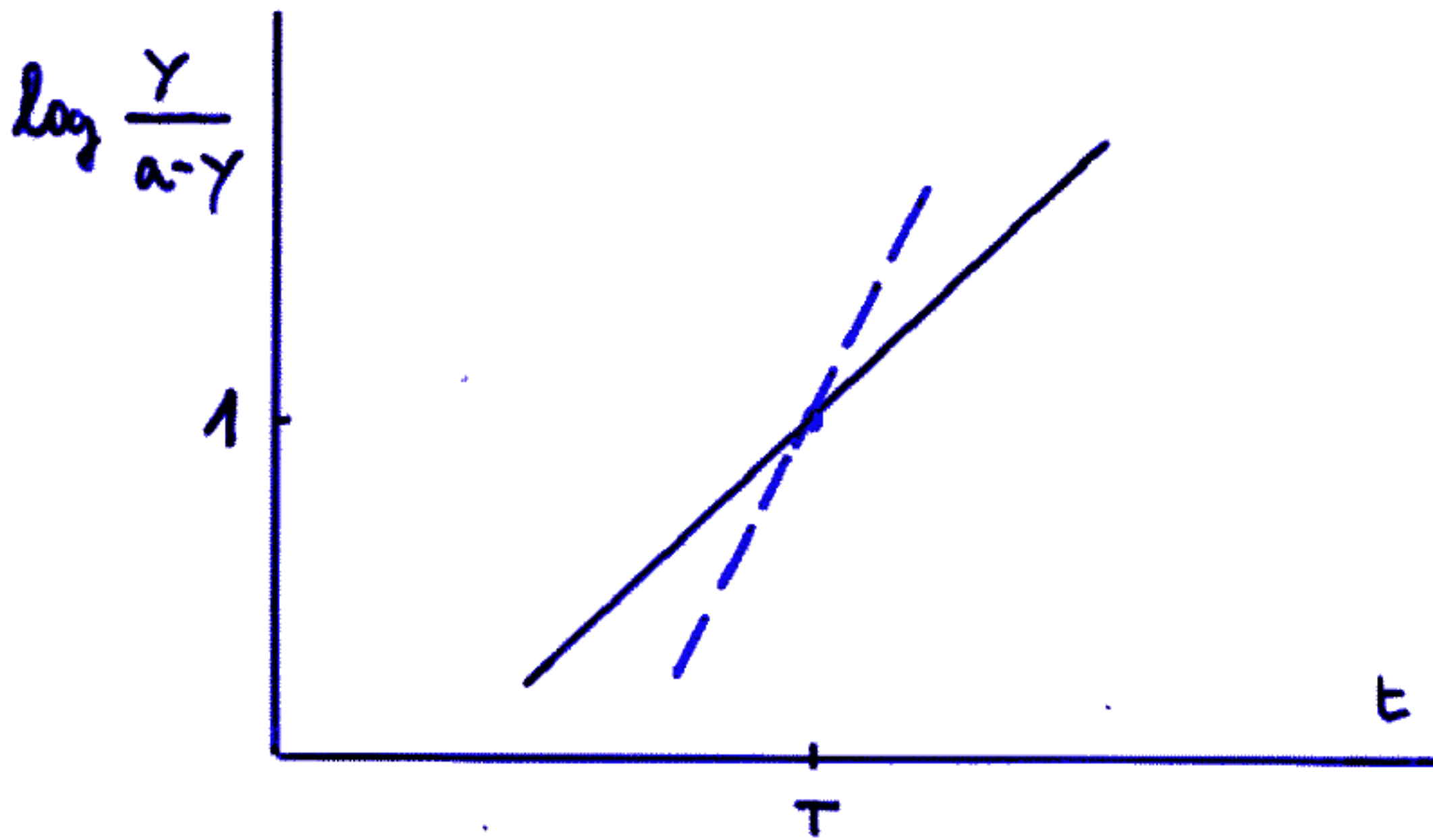
Gesellschaft: Lernkurve

CAR POPULATION IN ITALY
(IN MILLIONS)



CAR REGISTRATION - ITALY (I) (20M)





$$\log \frac{Y}{a-Y} = c(t-T) \quad \text{Grade}$$

dev: $F = \frac{Y}{a}$

$$\log \frac{F}{1-F} = \log \frac{Y}{a-Y}$$

Fig 19

THE DISCOVERY OF THE STABLE ELEMENTS
A LEARNING PROCESS

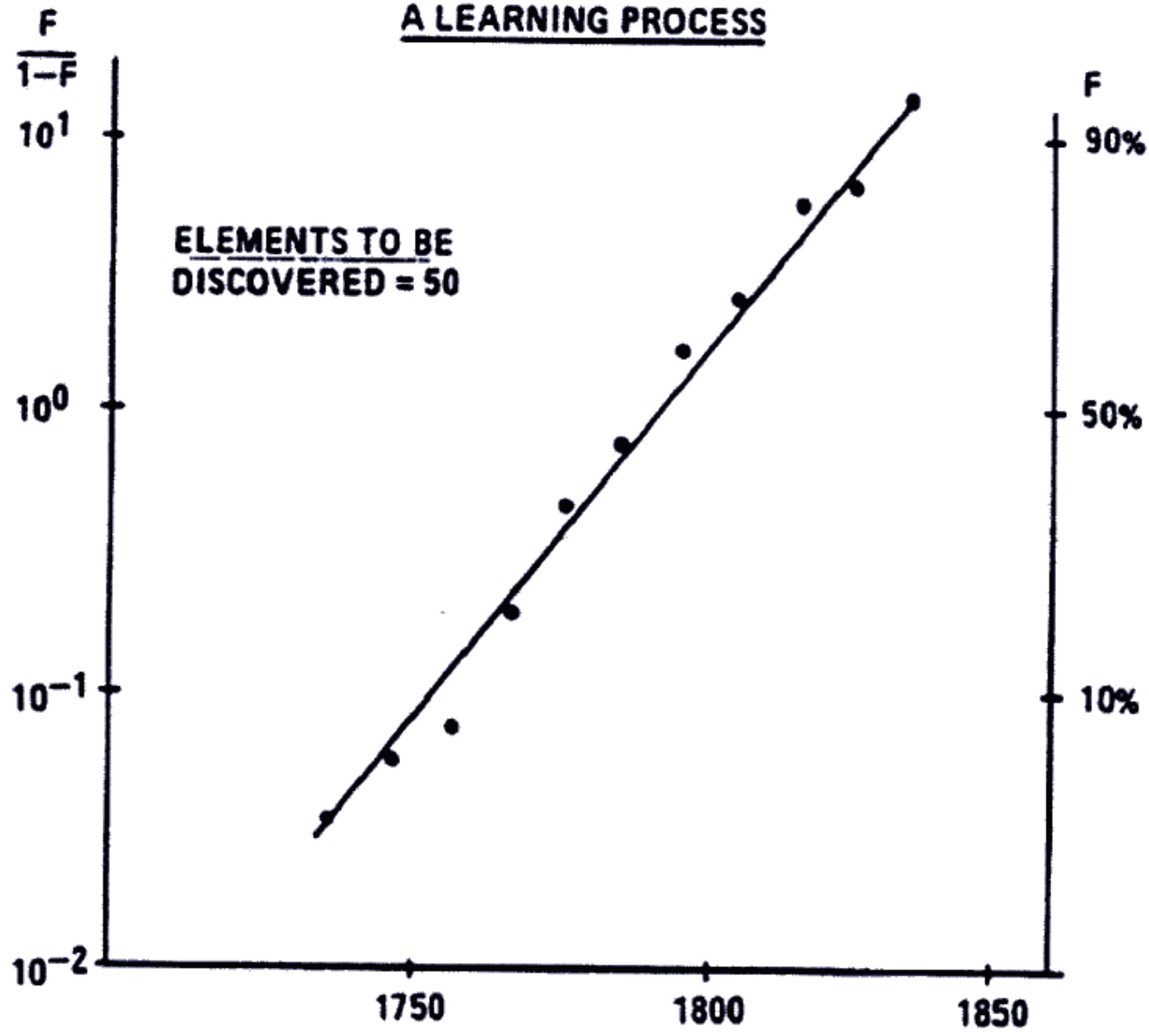
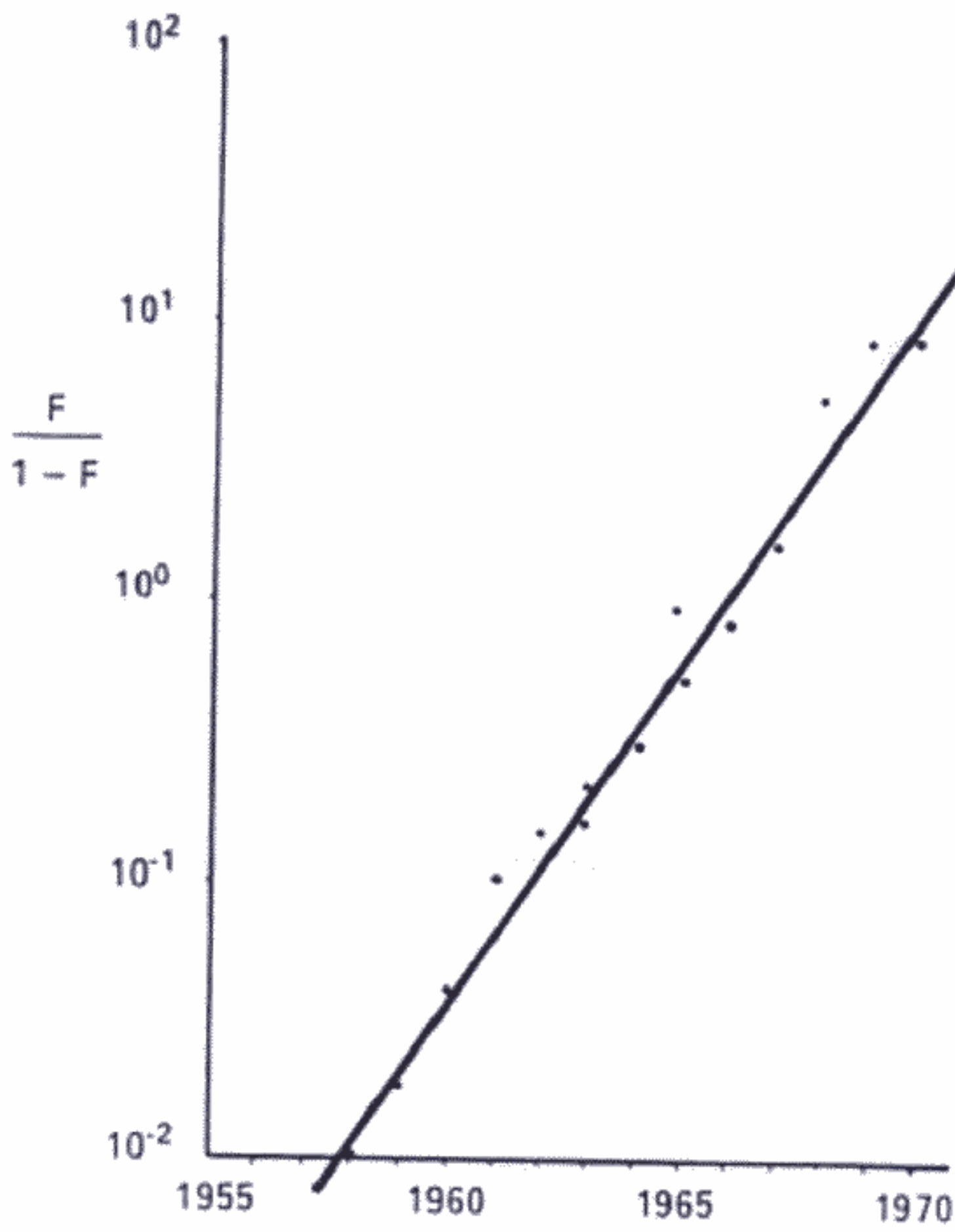
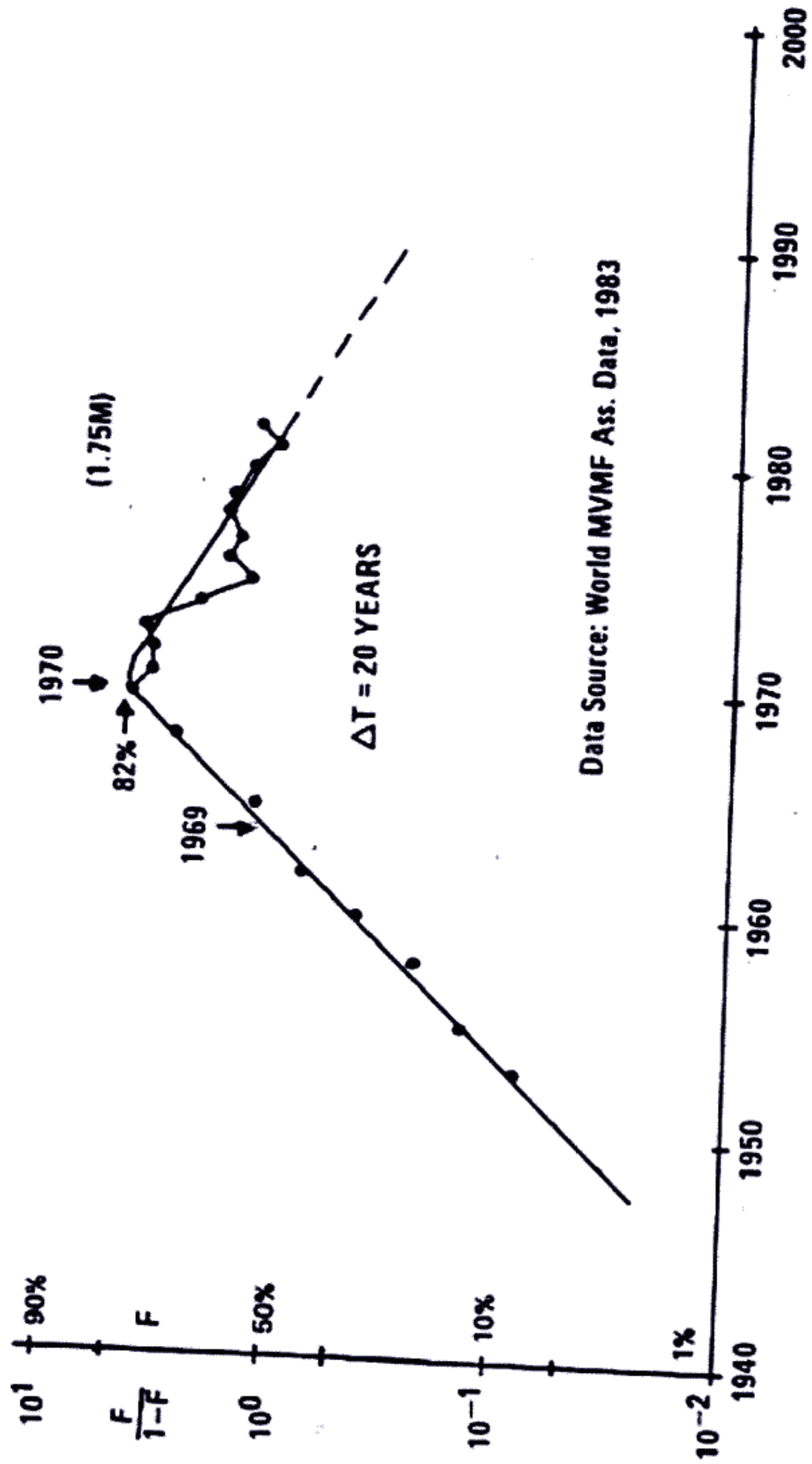


Fig 5

BRITISH RAILWAYS—DISPLACEMENT OF COAL BY OIL

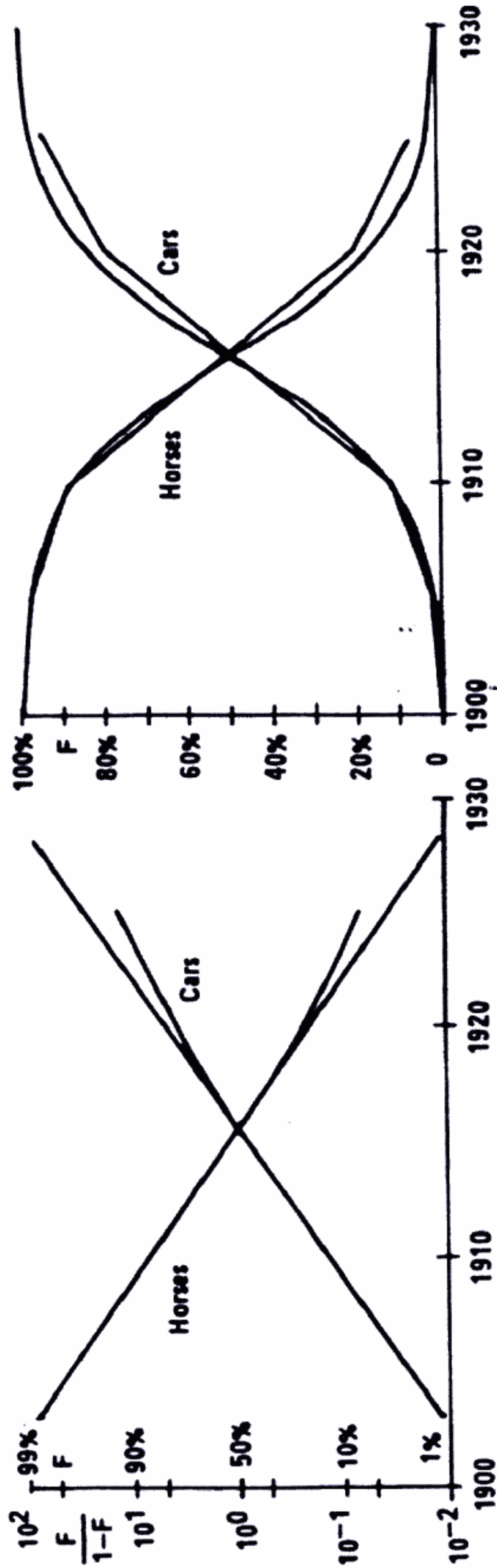


ITALY - CAR PRODUCTION
FIAT



C. Marchetti, IIASA, 1984

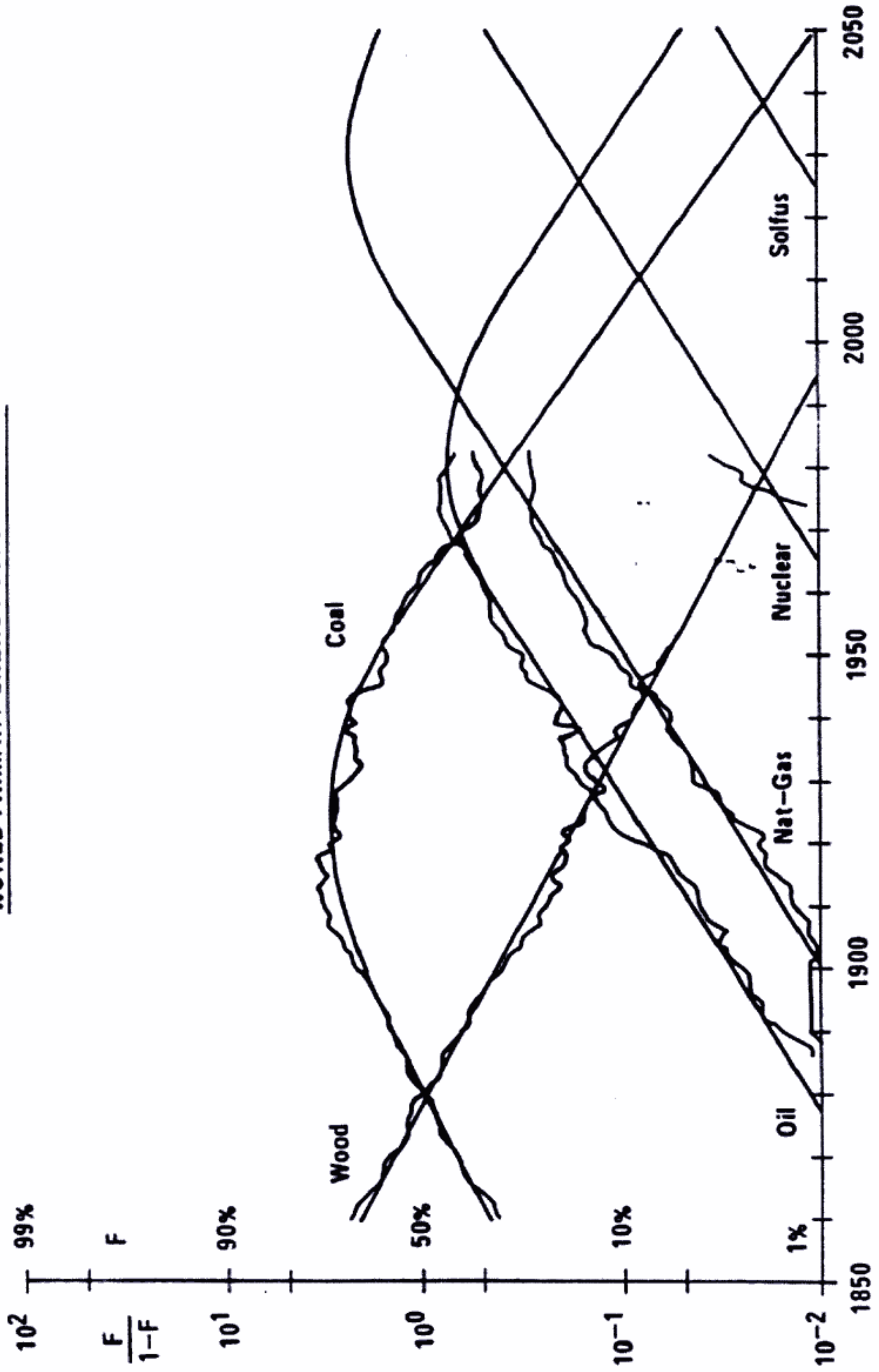
USA - SUBSTITUTION OF HORSES BY AUTOMOBILES



N. Nakicenovic, IIASA, 1985

Figure 3

WORLD PRIMARY ENERGY SUBSTITUTION



N. Nakicenovic, IIASA, 1984

Figure 5

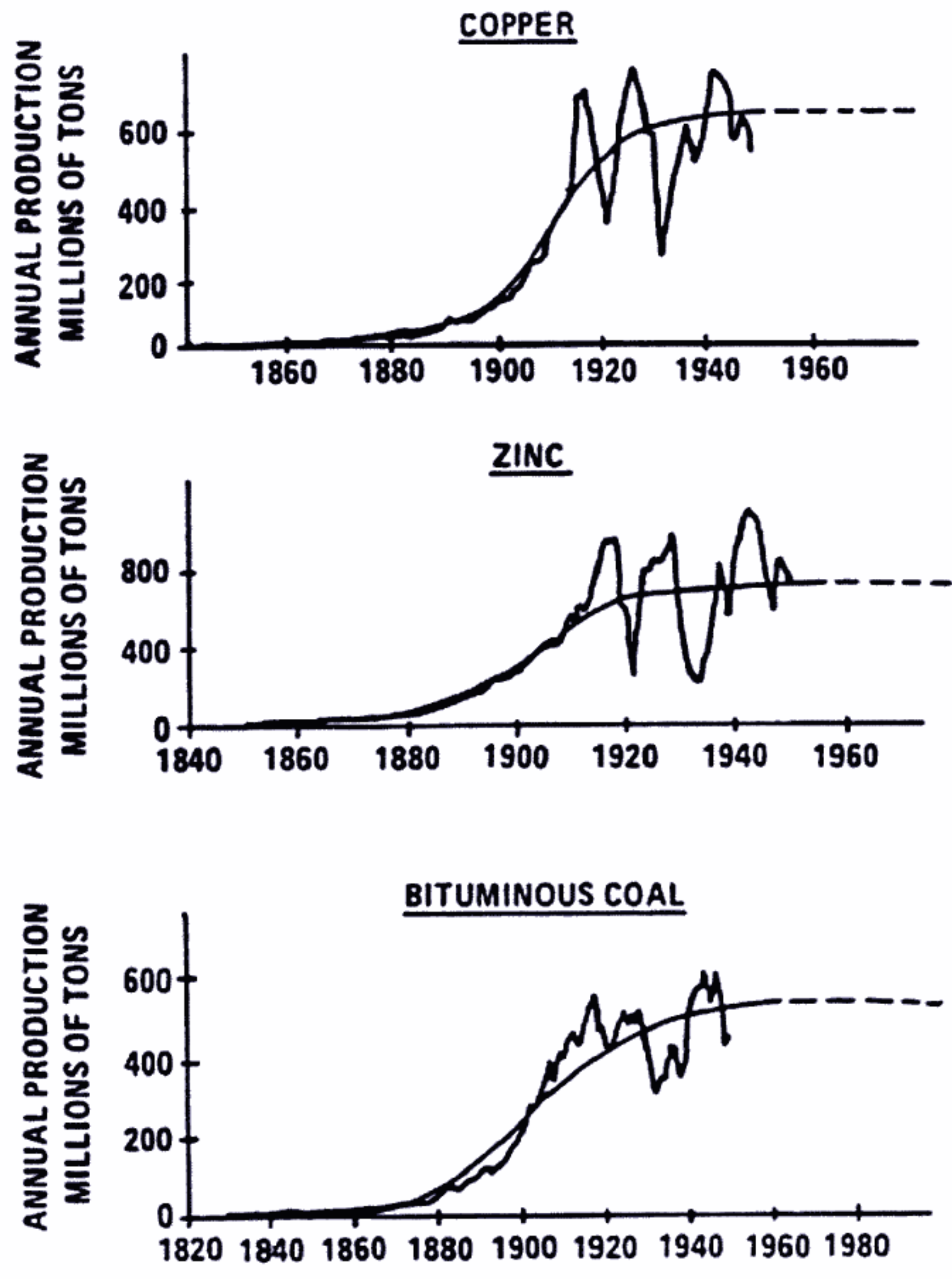


Figure 29.

These three examples from the mining industry in the US show how a very regular logistic progression can develop instabilities when the saturation point is approached.

2.) Zeit diskret, Intervall Δt

$$Y_{k+1} = Y_k + c \cdot \Delta t \cdot Y_k \cdot \left(1 - \frac{Y_k}{a}\right)$$

Transformation: $1 + c \cdot \Delta t = r$
 $a \left(1 + \frac{1}{c \cdot \Delta t}\right) = s$

Spezialfall $s = 1$

$Y_{k+1} = r Y_k (1 - Y_k)$ Verhulst 1845

$= f(Y_k)$ Abbildung $0 < Y < 1$

$= f_r(Y_k)$ 1. Iterierte

$f(f(Y_k)) = Y_{k+2} = f^2(Y_k)$ 2. Iterierte

allg.: $f^p(Y_k)$ p -te Iterierte

Anfangswert y_0 gegeben

\rightarrow Bahn y_0 = $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$

Trajektorie

Orbit

im eindim. Phasenraum

$$0 < Y_k < 1$$