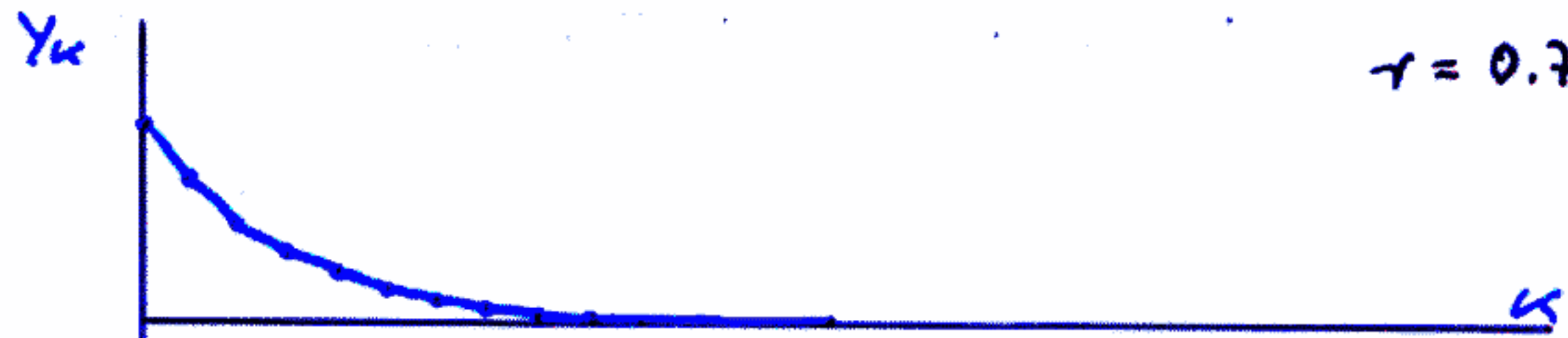


? Konvergenz
asymptotisches Verhalten / Abh. von r
? Stabilität der Bahn / Abh. von y_0

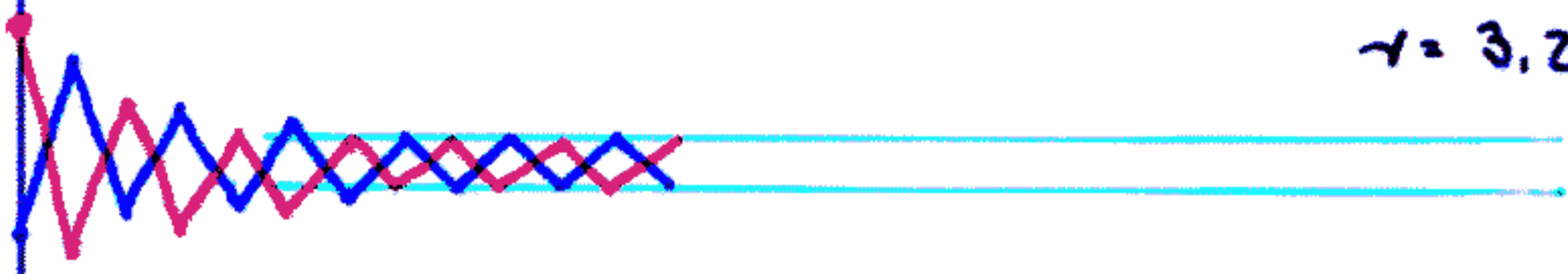
z.B.
 $r = 0.7$



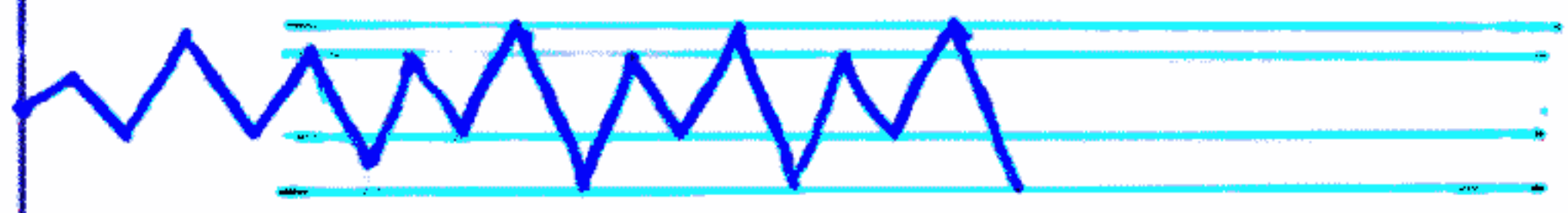
$r = 1.9$



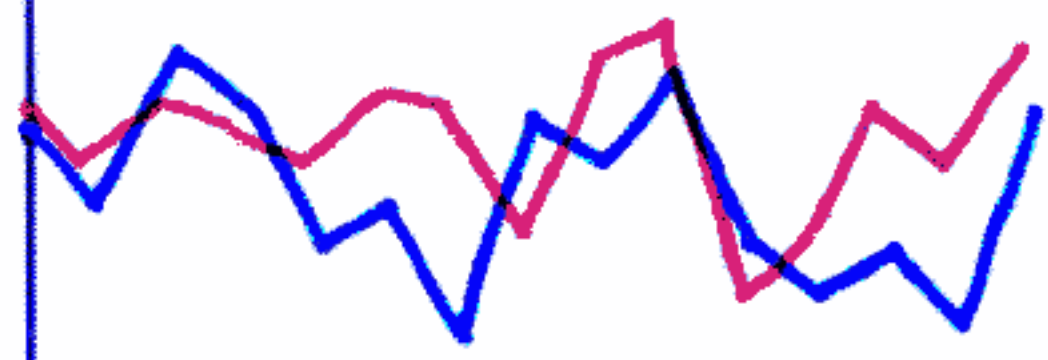
$r = 3.2$



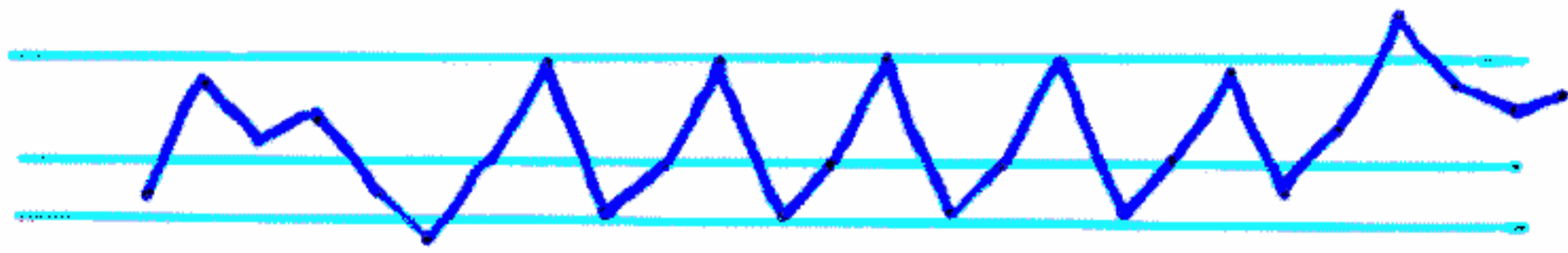
$r = 3.3$



$r = 3.7$

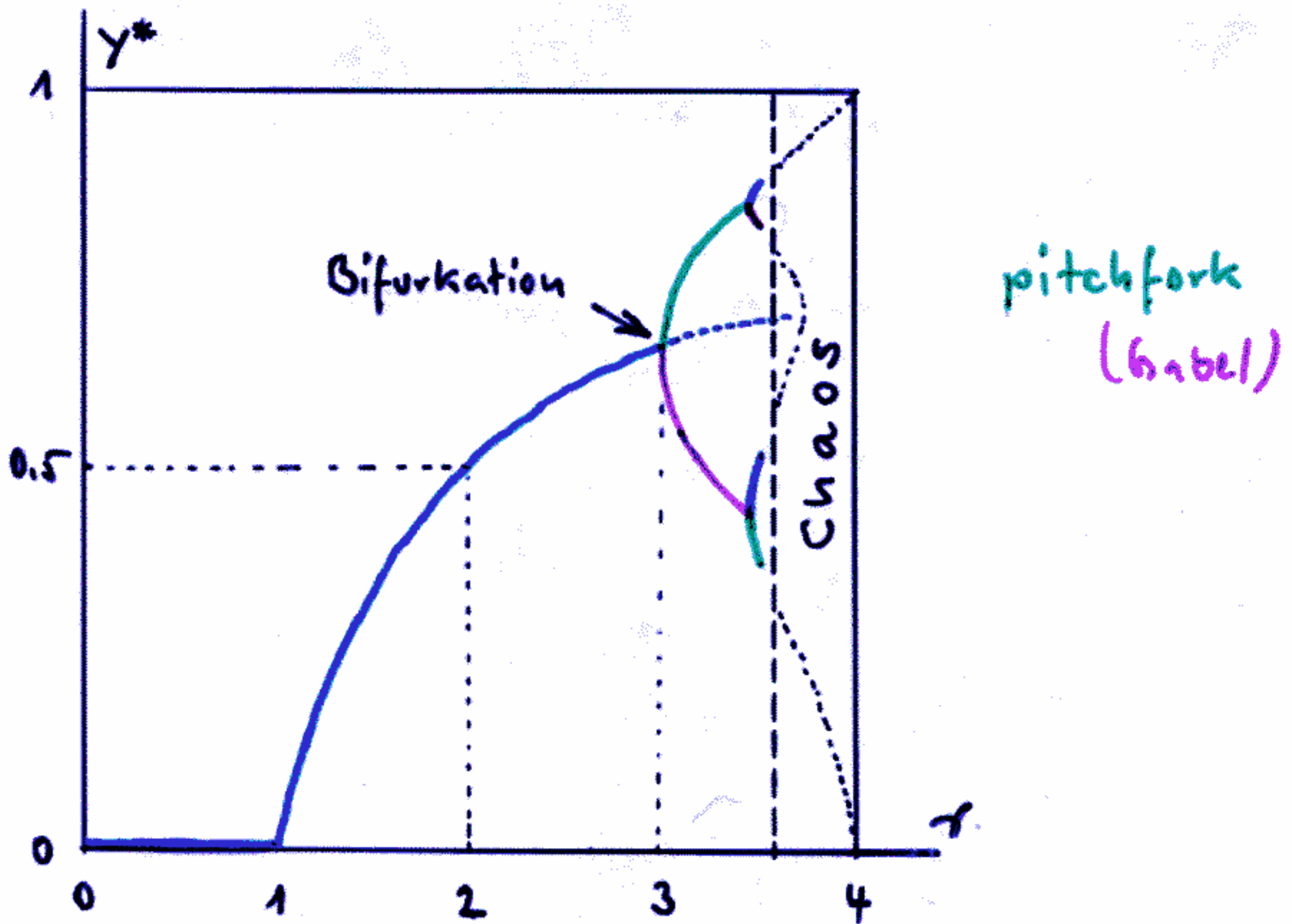


$r = 3.831874$



Zufallsmitte

Abbildung $y_{k+1} = f(y_k) = r \cdot y_k (1 - y_k)$



1. Bifurkation

$$r = 3$$

2. "

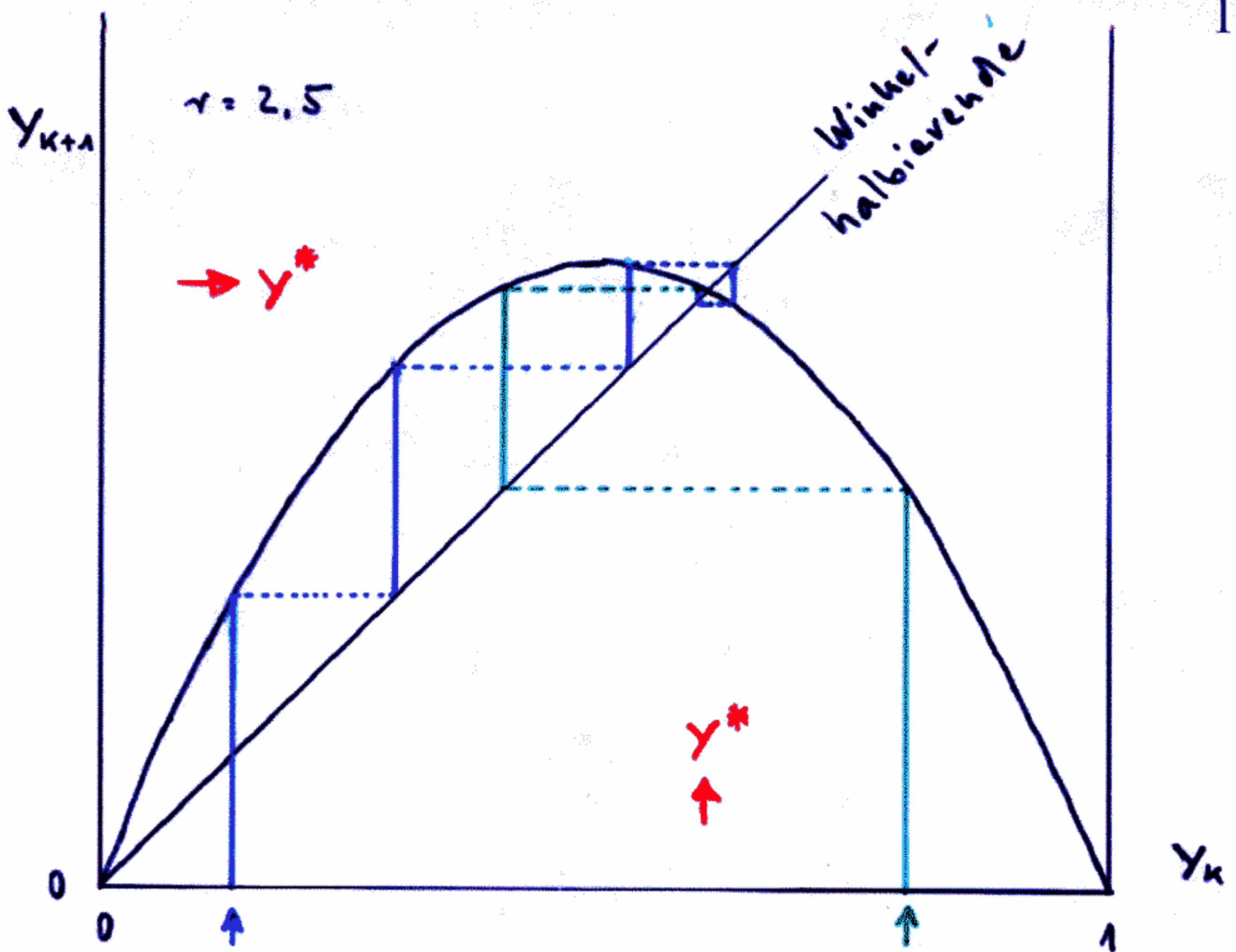
$$r = 3.449489 \dots$$

∞ . "

$$r_{\text{krit}} = 3.5699456 \dots$$

Feigenbaum 1978

Grossmann + Thomae 1977



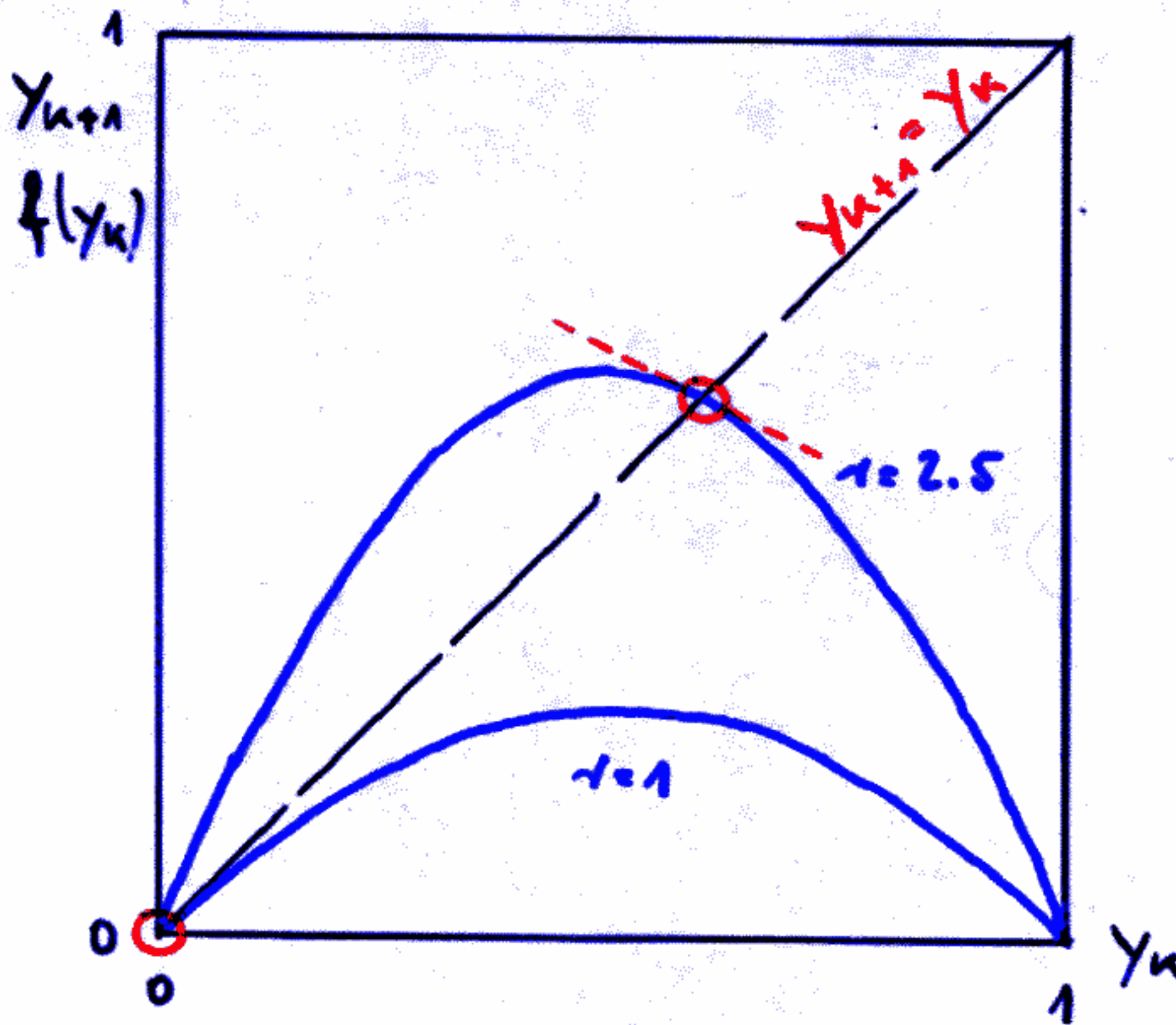
Ein stabiler Fixpunkt
fokussiert die Bahnen
(hier im ganzen Bereich)

⇒ Attraktor (bgs.: Repellor)

Bassin

= Bereich von Startwerten y_0 ,
die der Attraktor anzieht

$$y_{k+1} = r \cdot y_k (1 - y_k) = f(y_k)$$

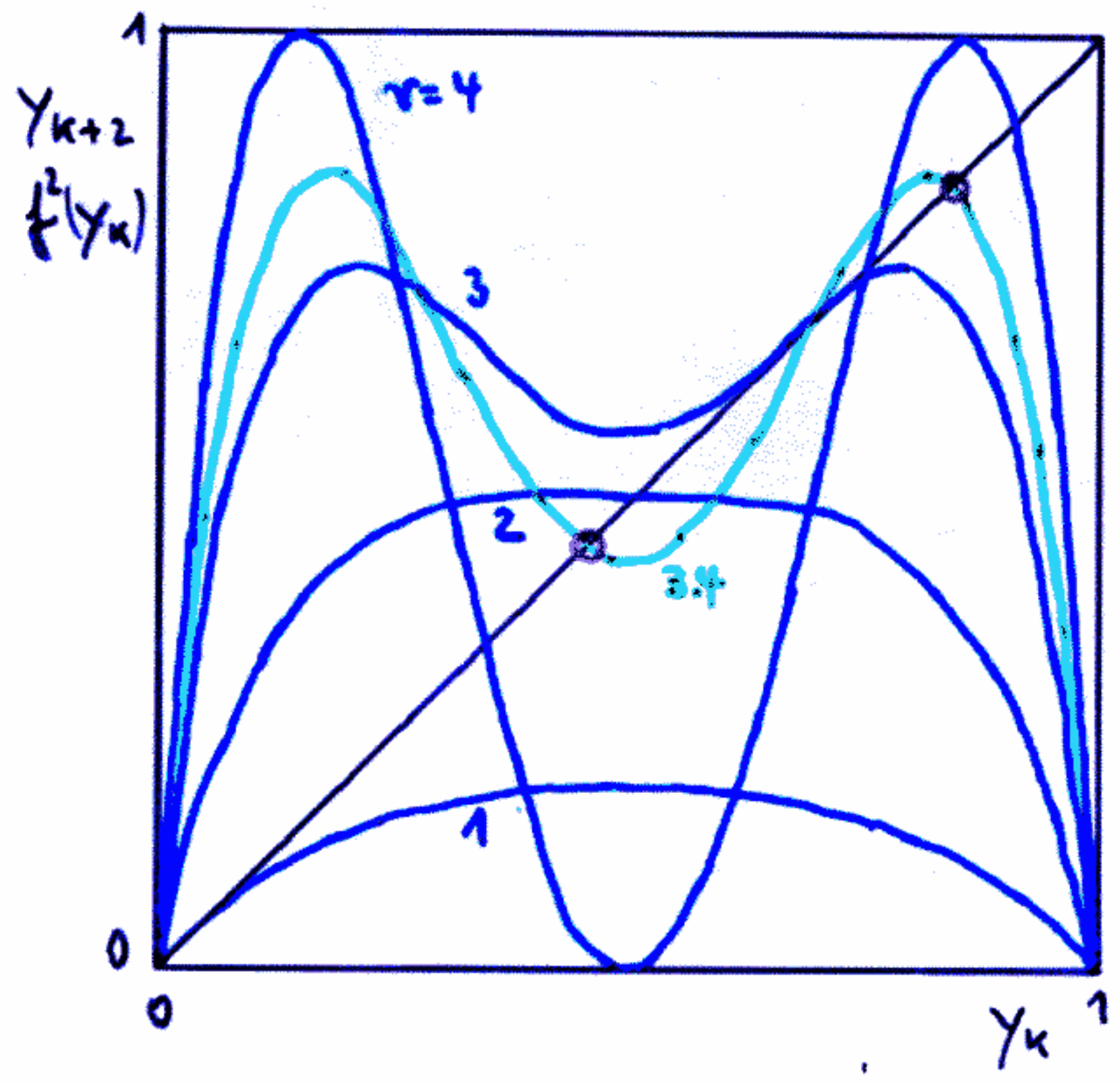
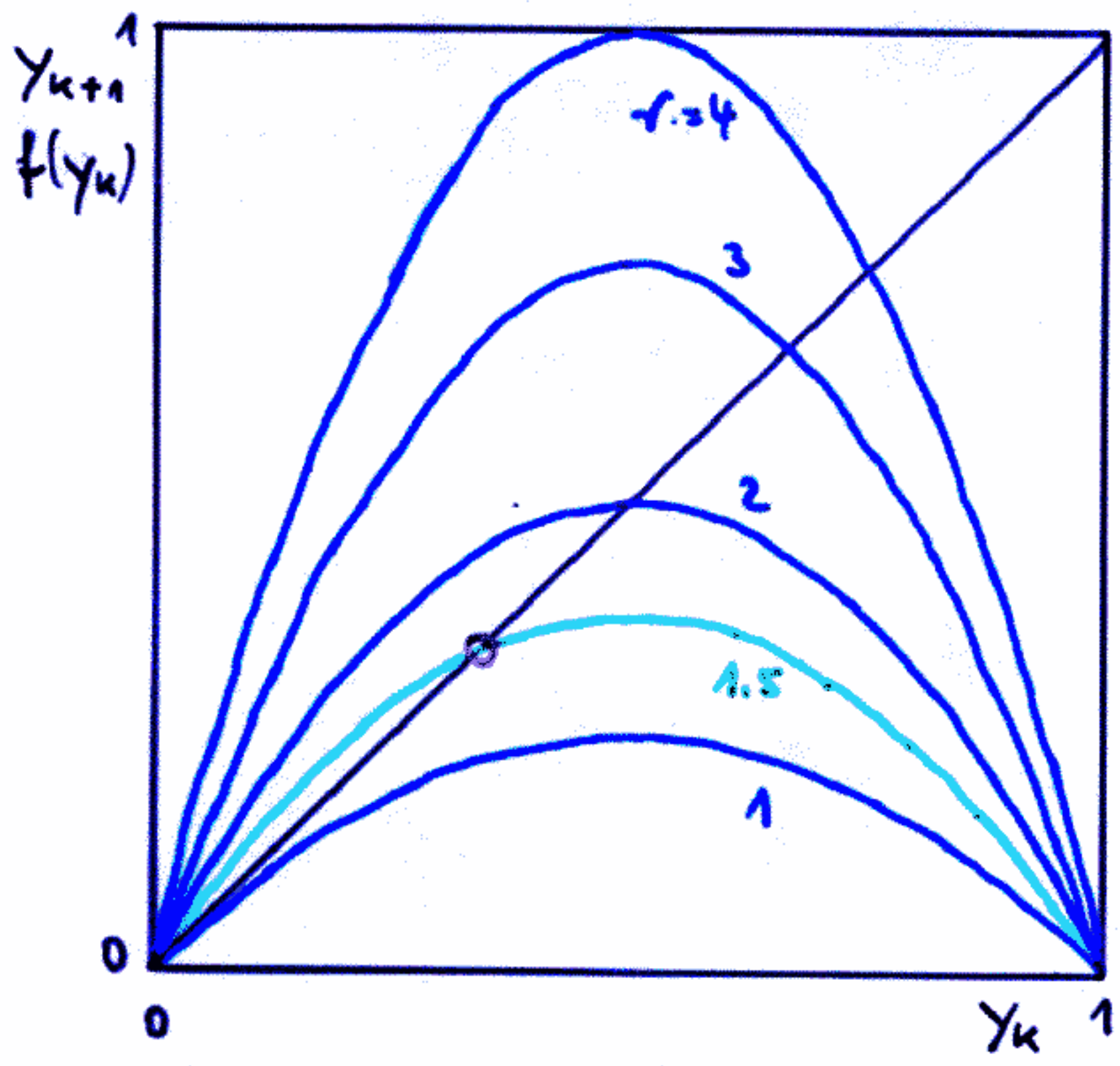


Fixpunkt y^* : $f(y^*) = y^*$

ist (lokal) stabil, wenn

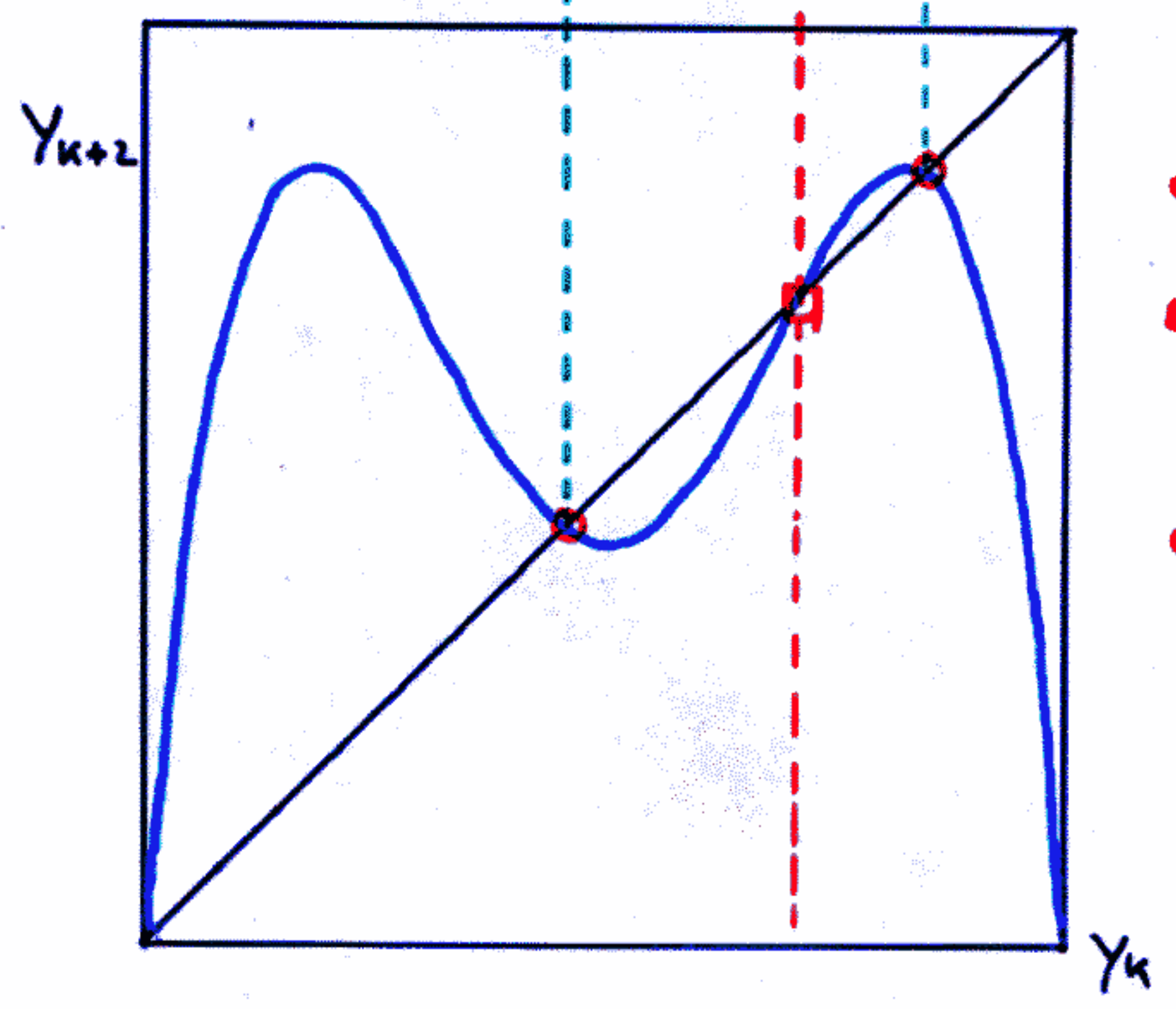
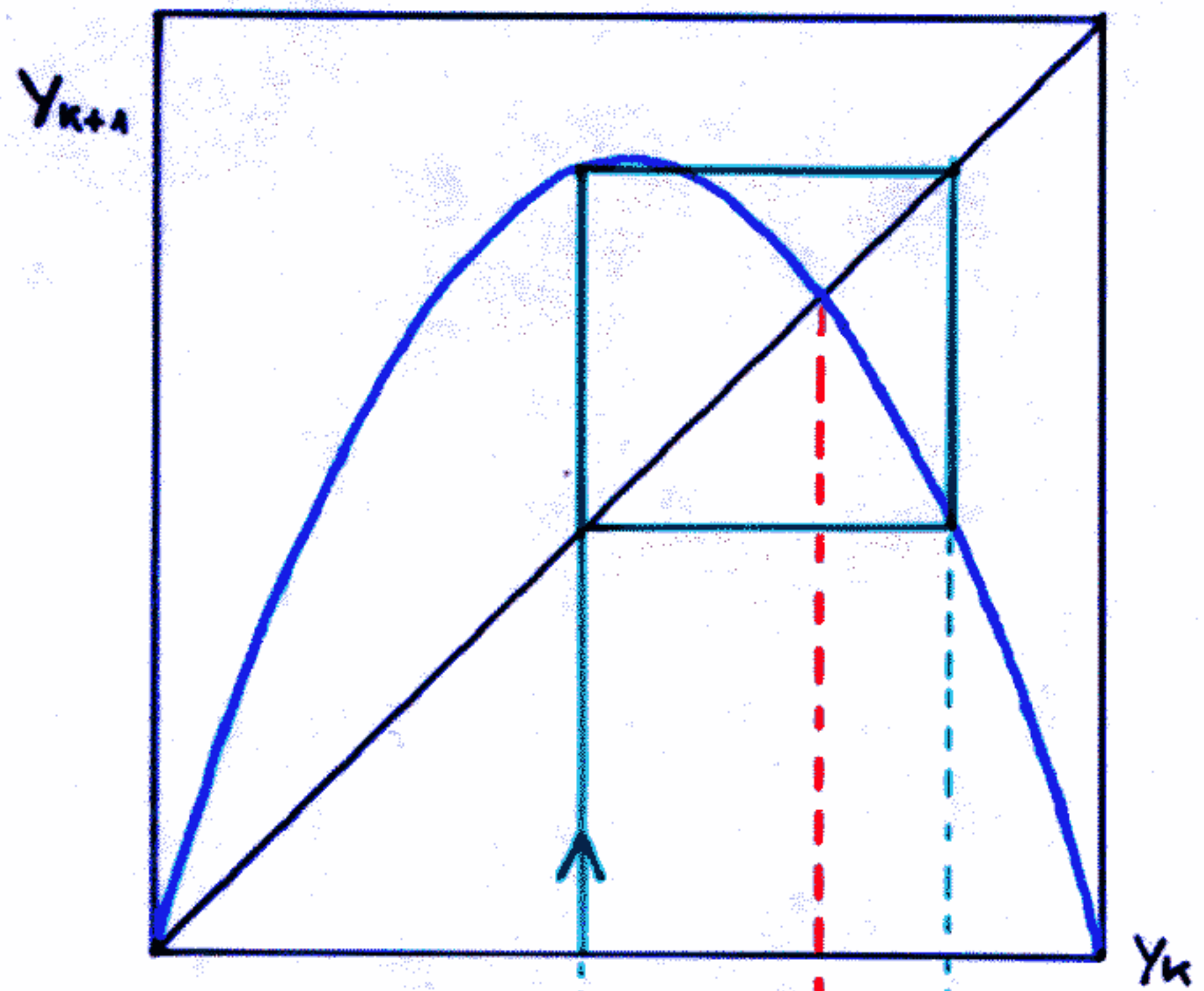
$$\left| \frac{d}{dy^*} f(y^*) \right| < 1$$

Abbildung $y_{k+1} = f(y_k) \equiv r y_k (1 - y_k)$



$$\begin{aligned}
 y_{k+2} &= r y_{k+1} [1 - y_{k+1}] \\
 &= r \cdot r y_k (1 - y_k) [1 - r y_k (1 - y_k)] \\
 &= r^2 y_k - r^2 y_k^2 + r^3 y_k^3 - r^4 y_k^4
 \end{aligned}$$

$r = 3.4$



- stabil
- ◻ instabil
- stabil

Grenzyklus / limit cycle
 hier: Periode 2

Bifurkation, Periodenverdopplung

x^* wird instabil

aber Folge $\{x_l, x_{l+1}\}$ ist stabil

(Bahnstück)

Periode 2

$f^2(x^*) = x^*$ hat stabilen Fixpunkt

allgemein $f^p(x^*) = x^*$

Periode p

mit $p = 2, 4, 8, \dots$

2^n

Grenzfall $n \rightarrow \infty$

Periode 2^∞

bei $r_{\text{krit}} = 3.5699456\dots$

$r > r_{\text{krit}}$: Chaos

deterministisches Chaos

irreguläres Verhalten (aperiodisch)

(scheinbar stochastisch)

$$r < 1$$

stabiler Fixpunkt bei $y^* = 0$
alle Bahnen enden dort

$$1 < r < 3$$

zwei Fixpunkte

- instabiler bei $y^* = 0$
- stabiler

$$r = 3+$$

zweiter Fixpunkt wird instabil

Bifurkation

$f^2(y_k)$ bekommt zwei neue stabile
Fixpunkte

Grenzyklus mit Periode 2
wird stabil

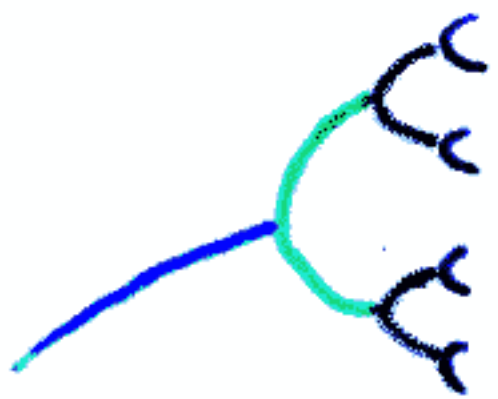


weitere Erhöhung von r :

Kaskade von Bifurkationen

$$r = 3.449489 \dots$$

Periode 2 \rightarrow Periode 4



Periodenverdopplung

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^\infty$$

$$r = 3.5699456 \dots = r_{\text{krit}}$$

Feigenbaum

$\uparrow \gamma^*$

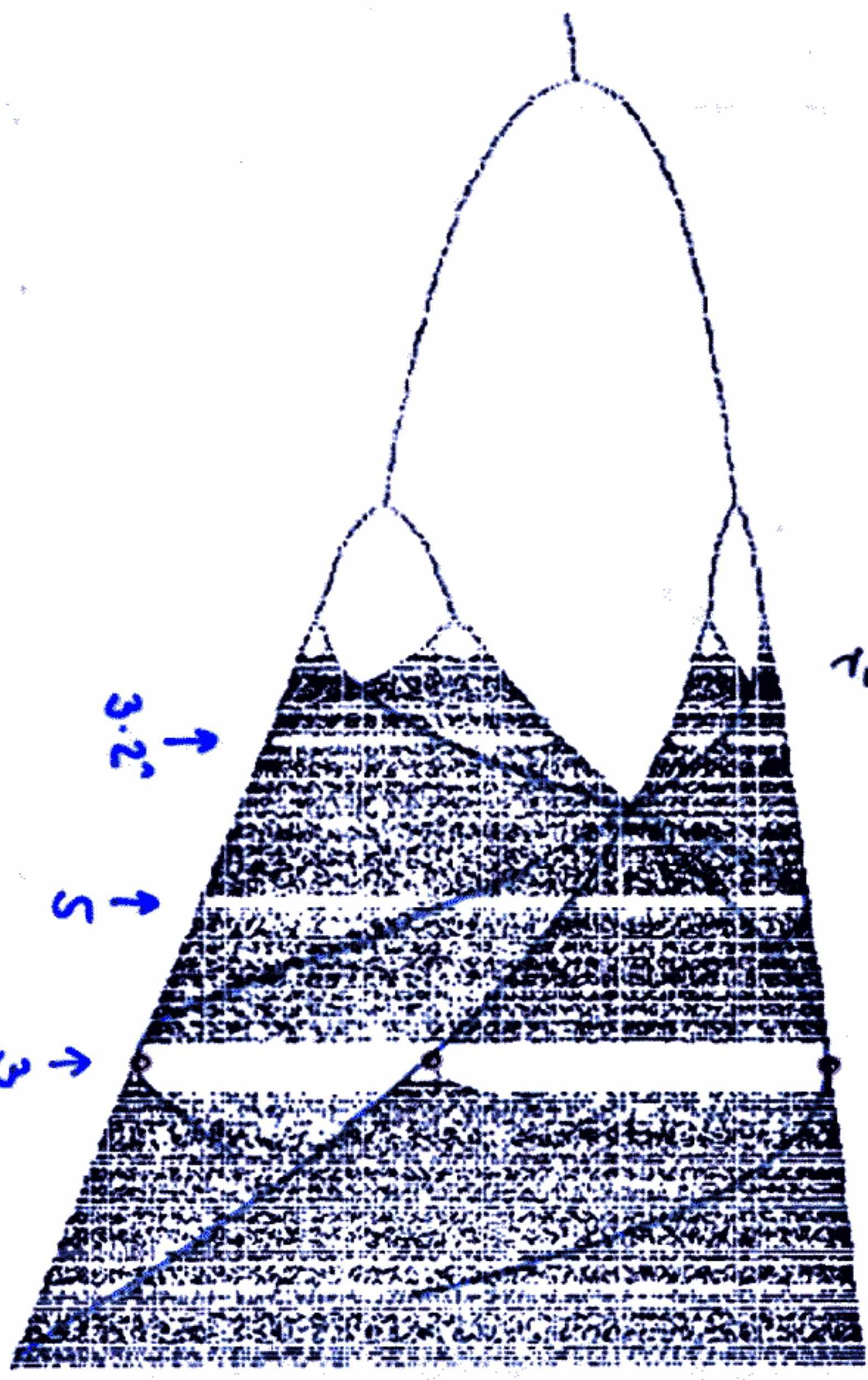
$\tau_{krit} = 3.5699456$

$\downarrow \gamma = 3.831874$

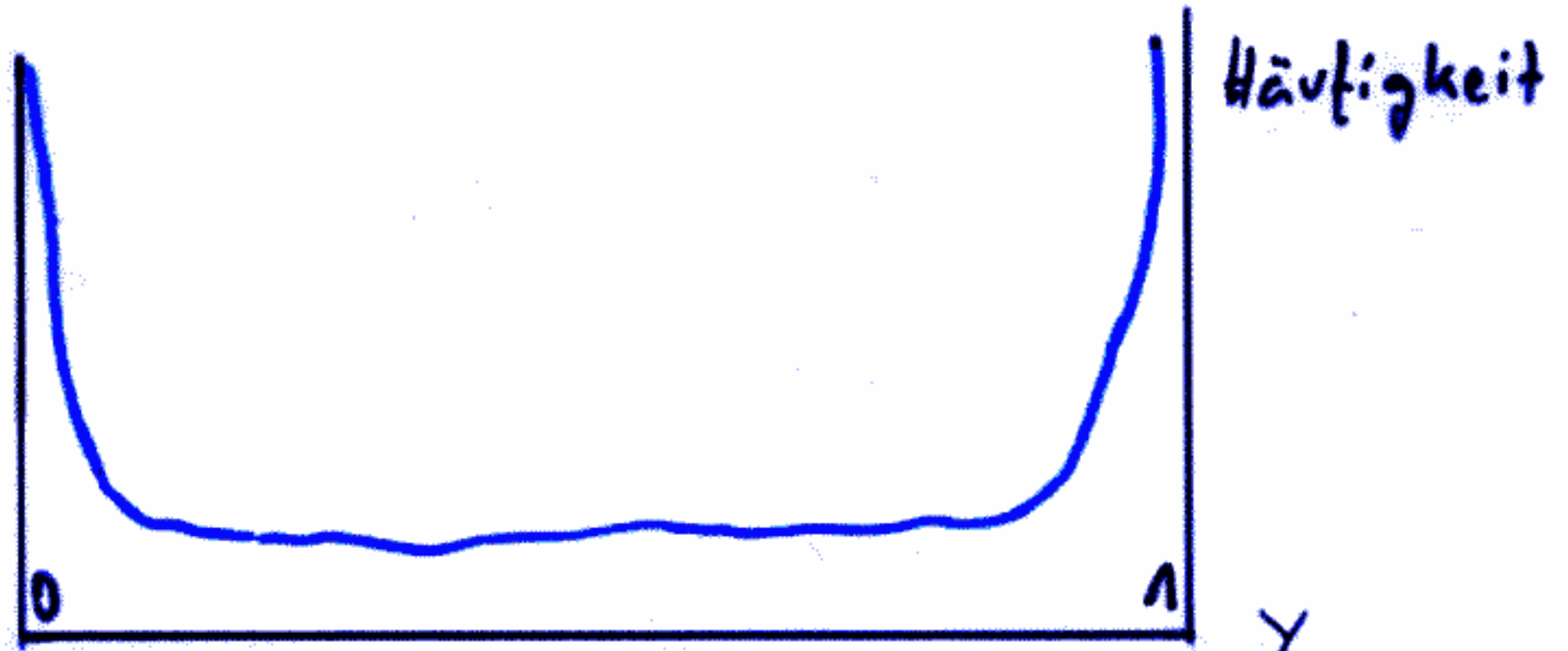
Feuster mit 3er - Zykel
im Chaos - Bereich

$\rightarrow \gamma$

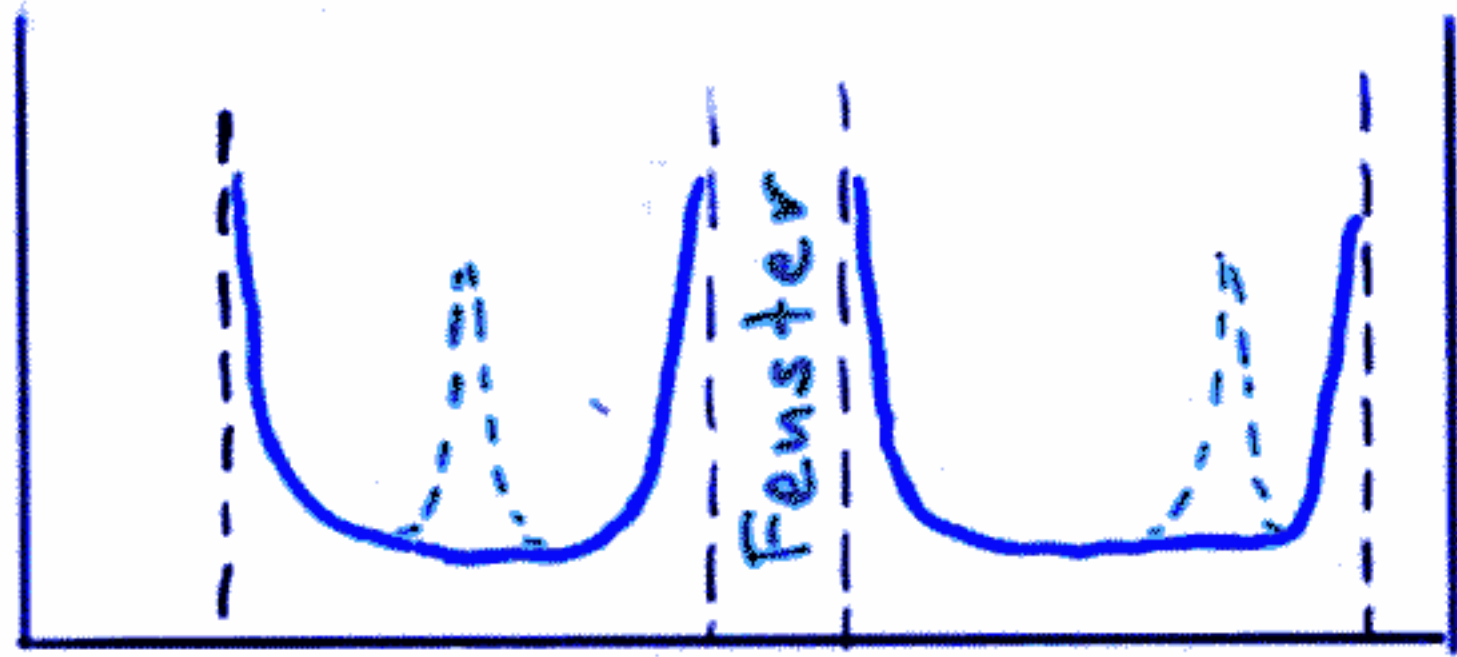
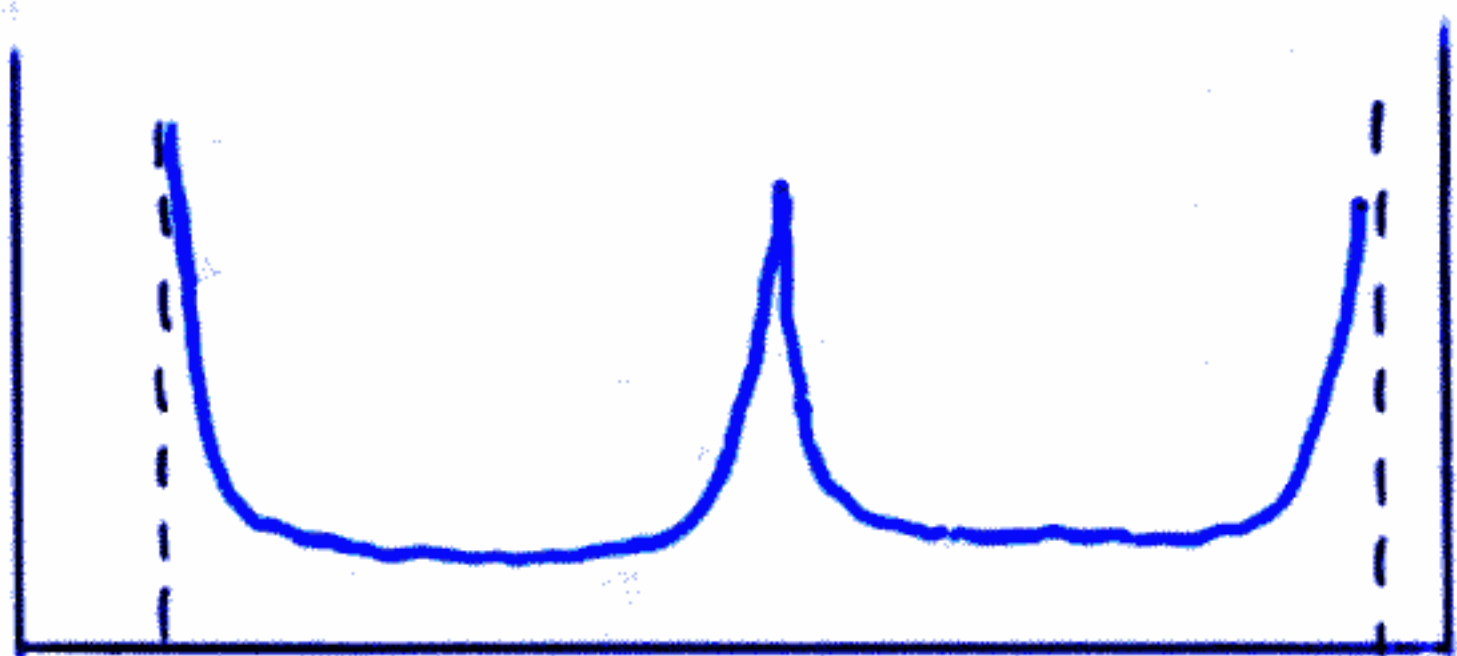
$\uparrow 3.2$
 $\uparrow 5$
 $\uparrow 3$



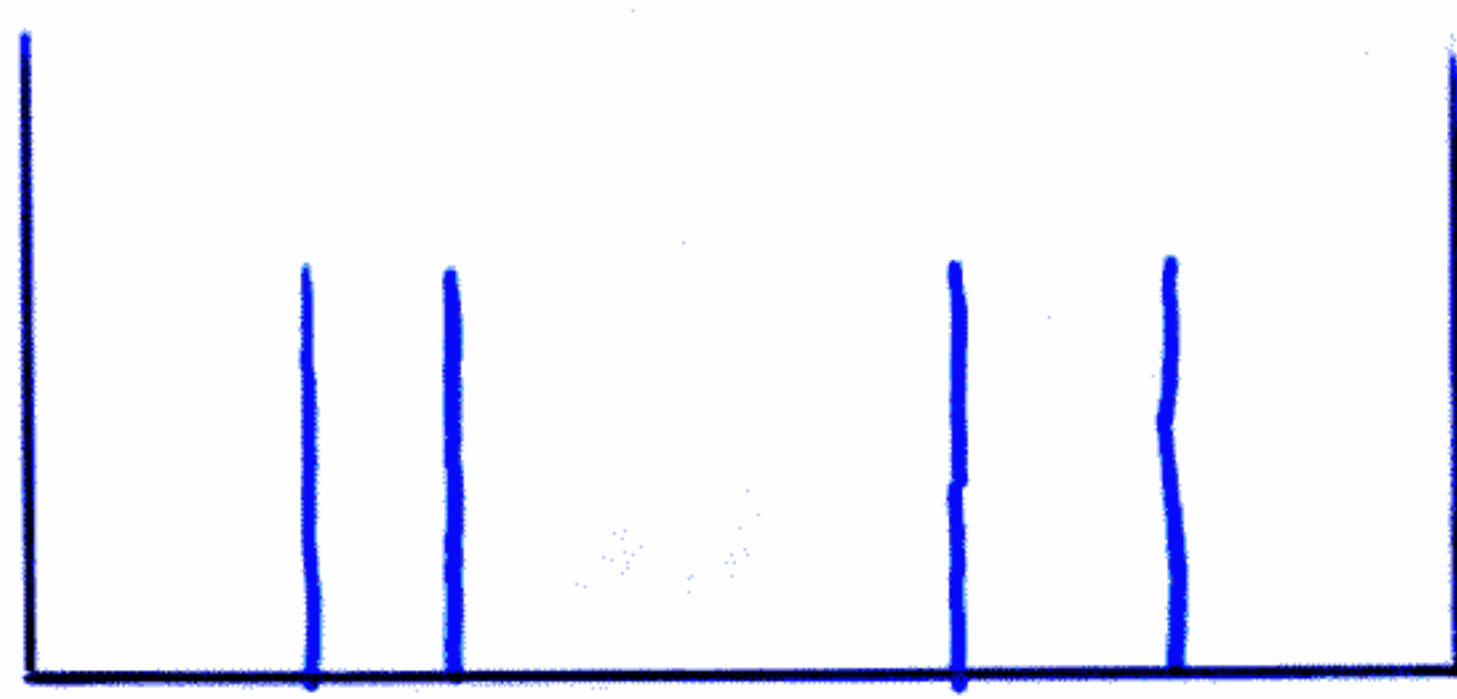
$r = 4$



$r \downarrow$



$r < r_{krit.}$



dazwischen (bei $r = r_{krit.}$) Periode 2^∞

d.h. 2^∞ diskrete Zustände

Kein kontinuierliches Spektrum

"Cantor-Menge"

Attraktor



Ansatz $\eta = \epsilon \cdot e^{N \lambda(x_0)}$

λ = Lyapunov-Exponent

$\lambda < 0$: Kontraktion
asymptotisches Aussterben der Störung

$\lambda > 0$: Divergenz
Störung wird angefacht

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\eta}{\epsilon} \right|$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{d}{dx_0} f^N(x_0) \right|$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| ; x_i = f(x_{i-1})$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|$$

\cong mittlerer Verlust an Information (über die Position von x im Intervall) nach einer Iteration

Maß für Vorhersagbarkeit

$$\frac{d}{dx} f^2(x) \Big|_{x_0} = \frac{d}{dx} f[f(x)] \Big|_{x_0}$$

Kettenregel

$$= f'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$$

innere Ableitung

$$= f'(x_1) \cdot f'(x_0) \quad \text{mit } x_1 = f(x_0)$$

$$\frac{d}{dx_0} f^N(x_0) = \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i)$$

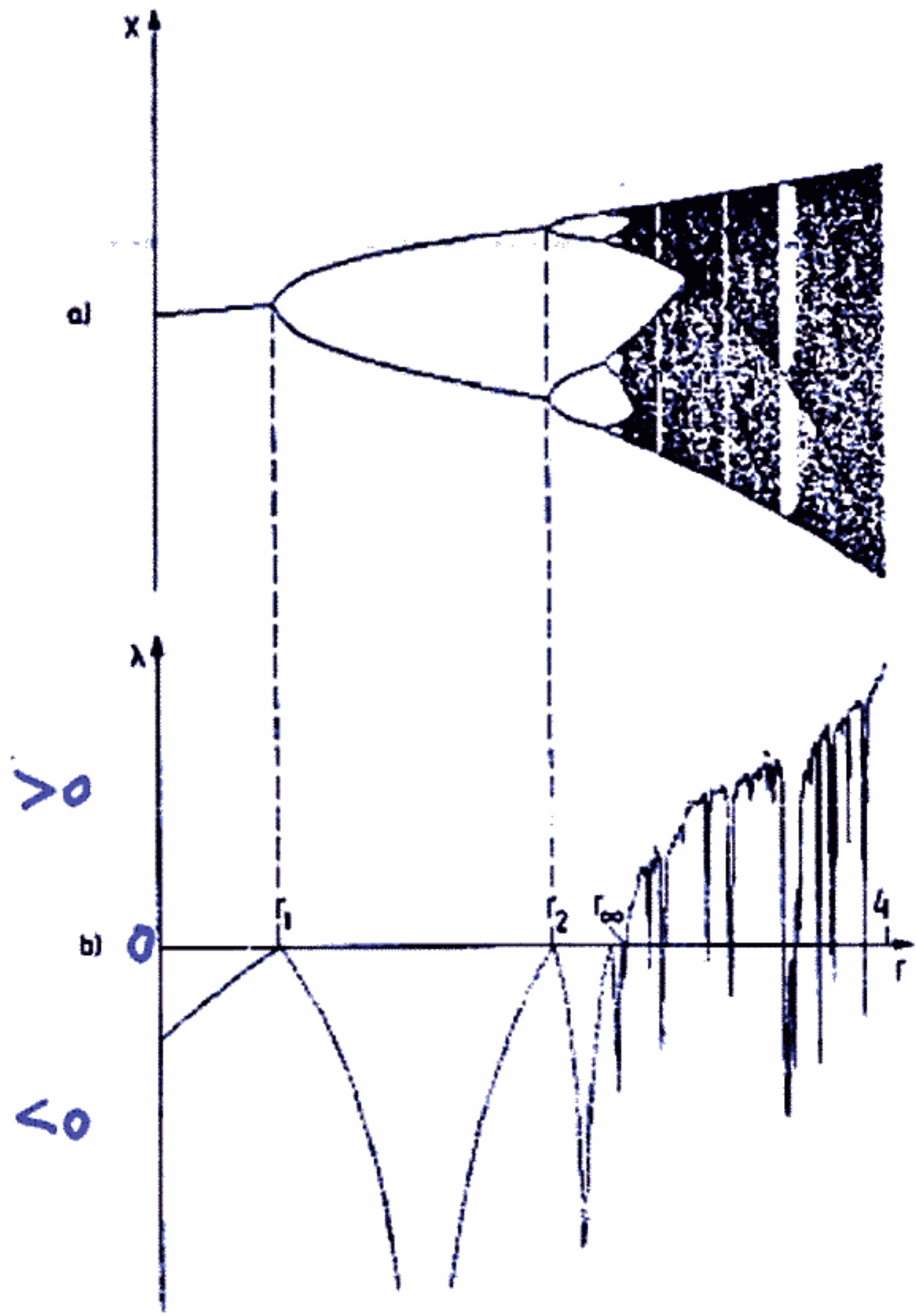
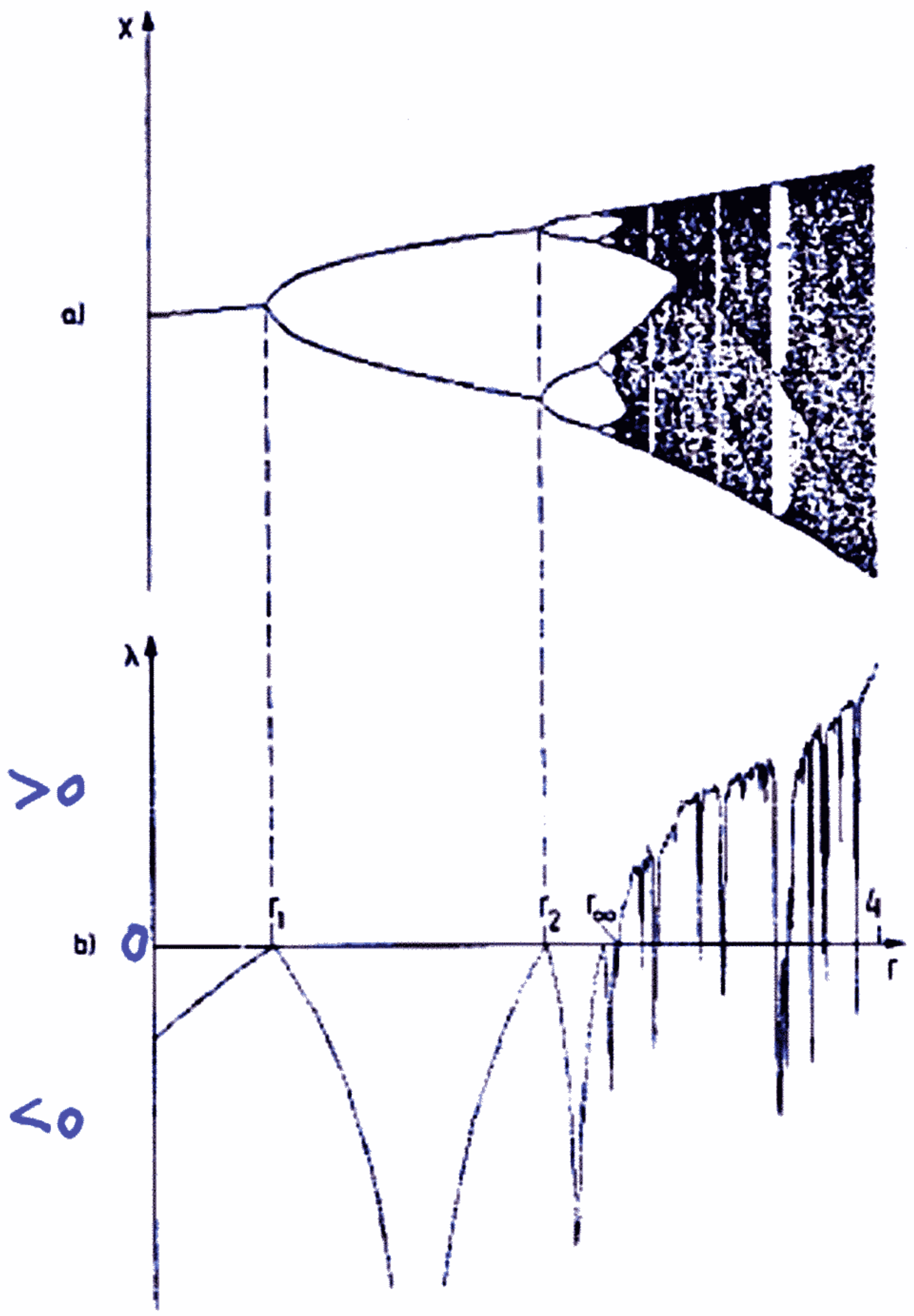
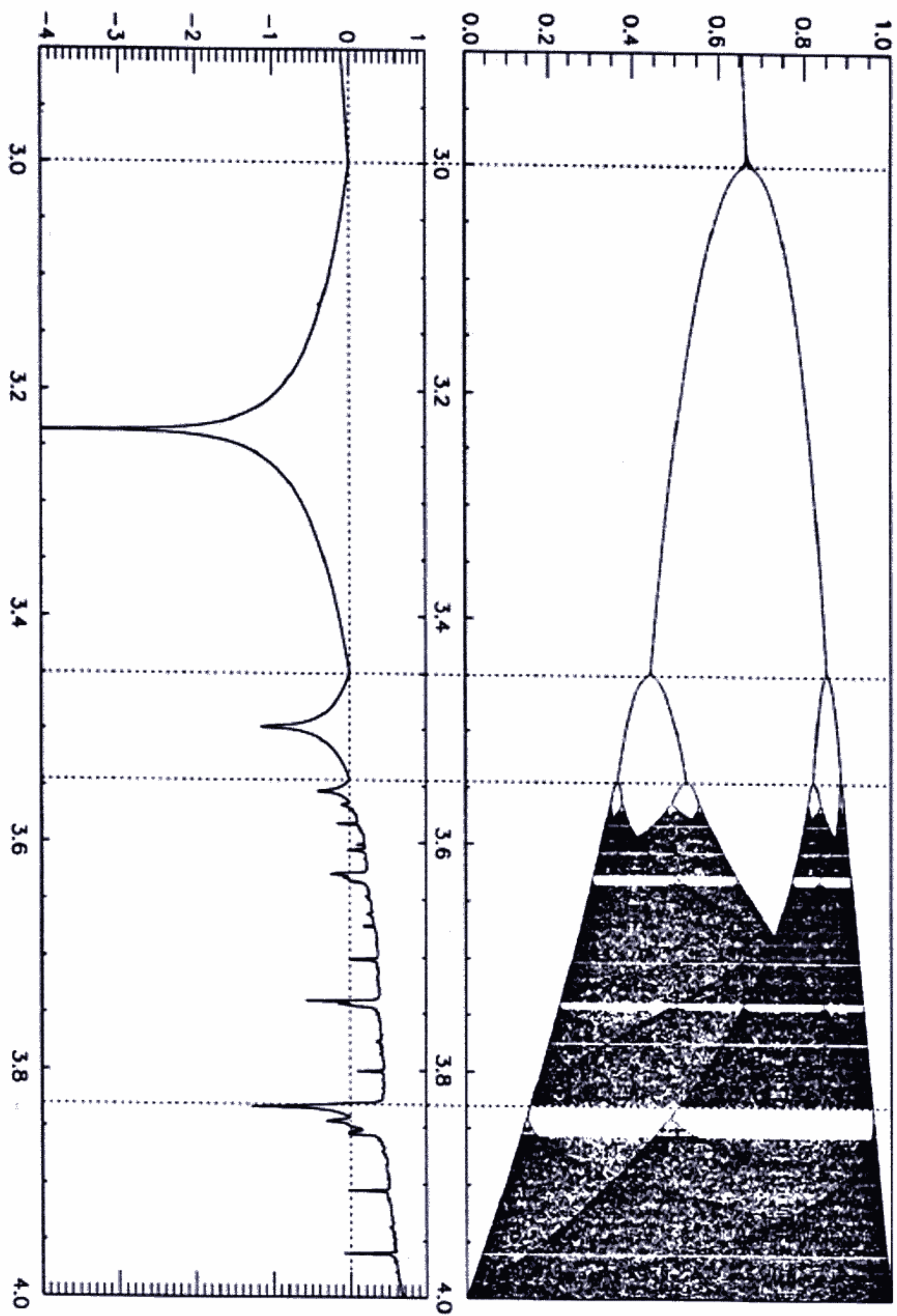


Fig. 19: a) Iterates of the logistic map, b) Liapunov exponent λ (after W. Desnizza, priv. comm.).

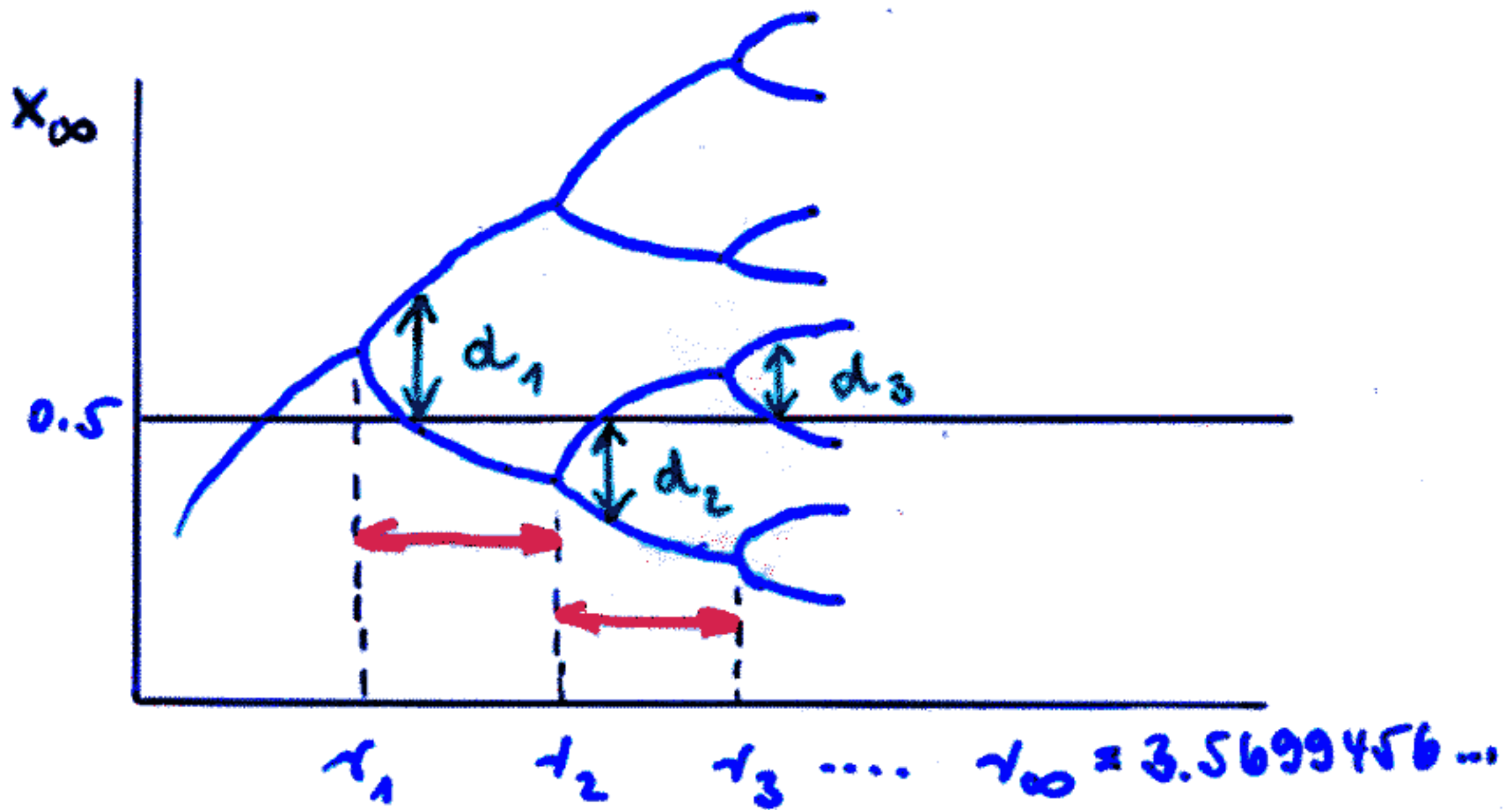




Universalität des „Feigenbaum's"

$$x_{k+1} = r \cdot x_k \cdot (1 - x_k)$$

pitchfork bifurcation



$$r_n = r_{\infty} - \text{const.} \cdot \delta^{-n} \quad \text{für } n \gg 1$$

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha \quad \text{für } n \gg 1$$

$$\delta = 4.6692016091 \dots$$

$$\alpha = 2.5029078750 \dots$$

Vgl. π , e

Übergang zum Chaos: universell

z.B. über Periodenverdopplung

für alle quadrat. Abbildungen

für alle Modelle mit folg. Eigenschaften:

- Abb. des Einheitsintervalls auf sich selbst
 $x \in [0,1]$

- unimodal (ein Maximum bei $x = 0.5$)

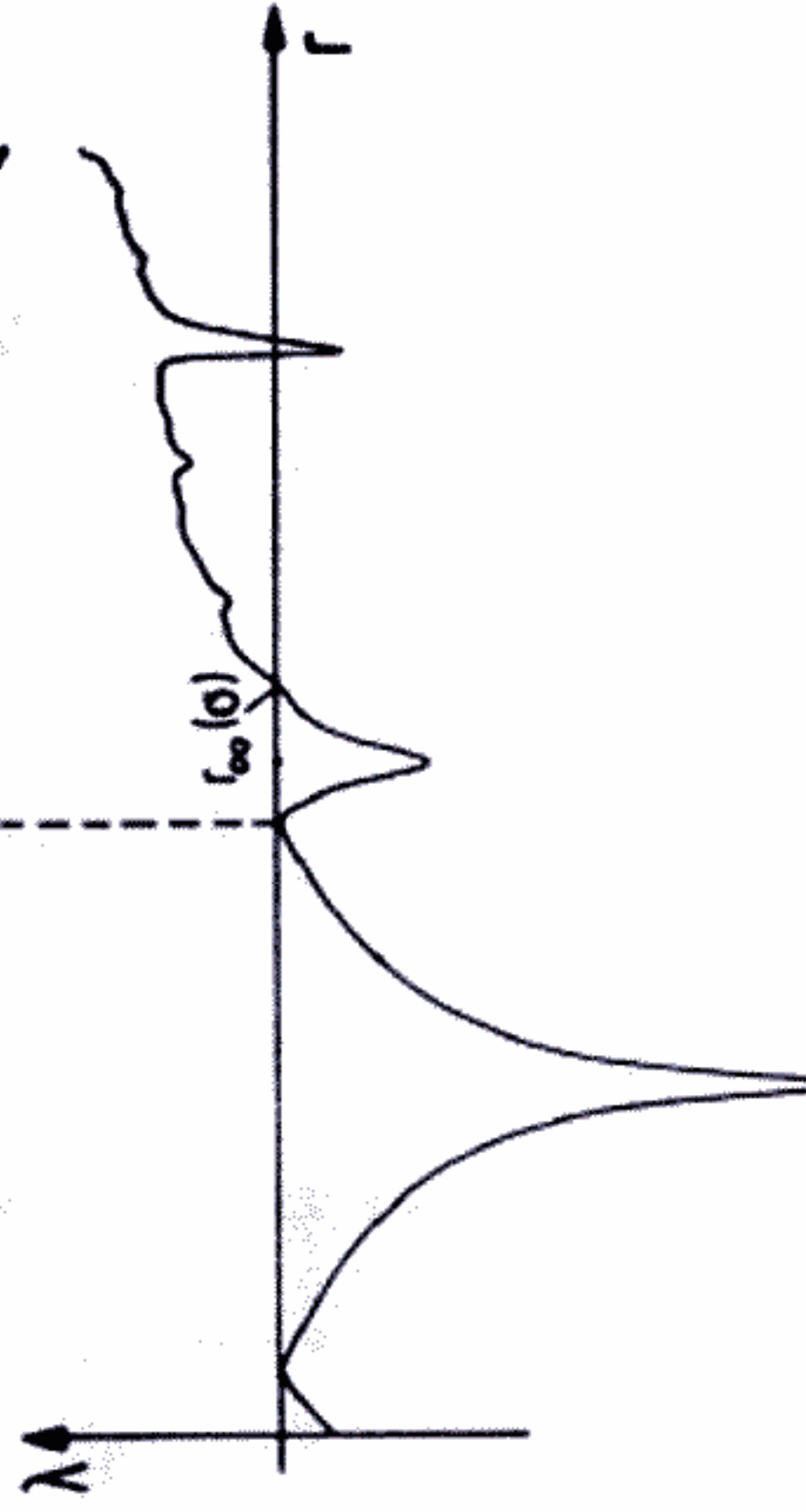
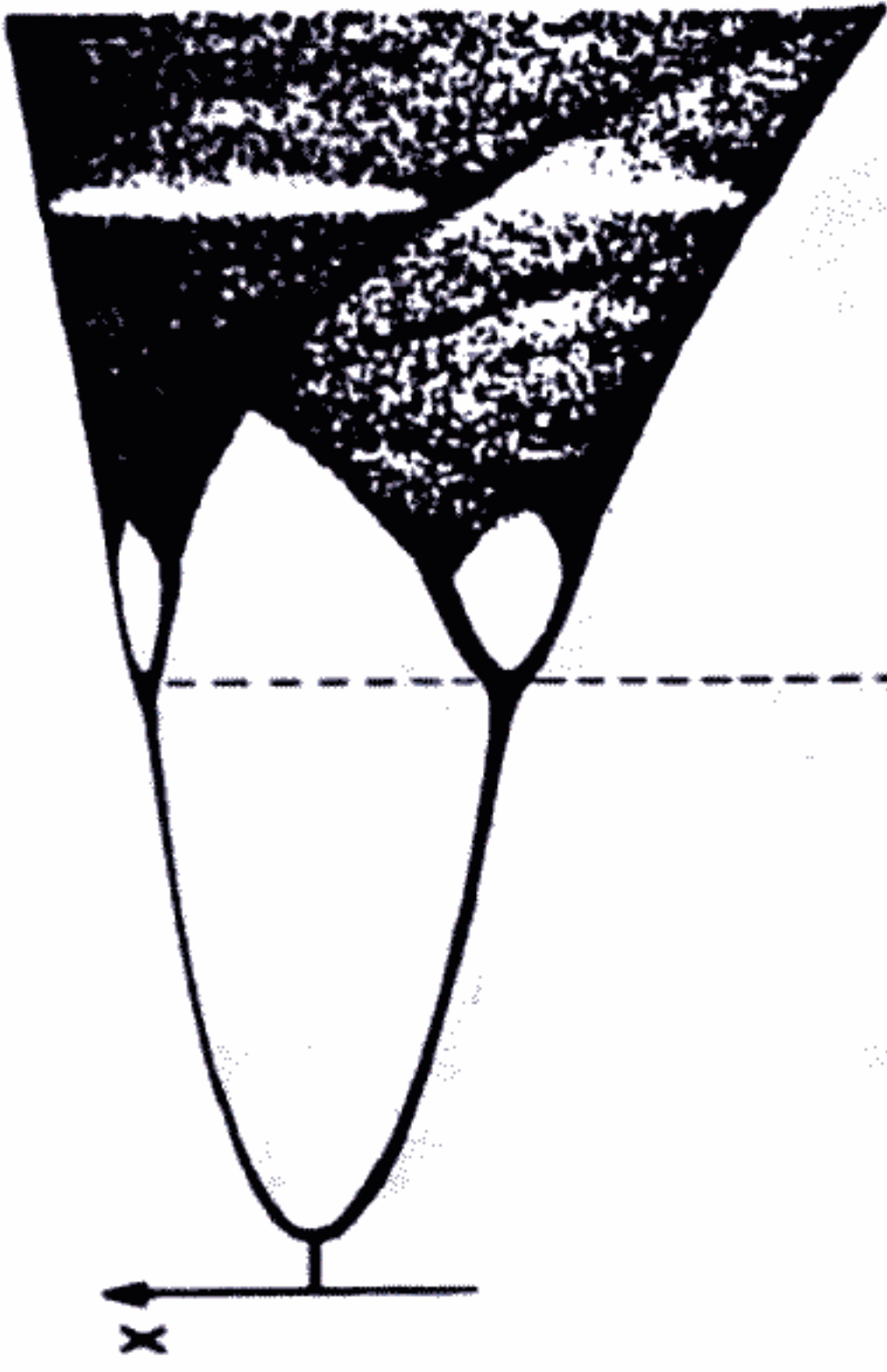
- monoton für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
und $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned}
 - Sf &= \frac{d^2}{dx^2} [f'(x)]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 < 0 \text{ für } 0 \leq x \leq 1
 \end{aligned}$$

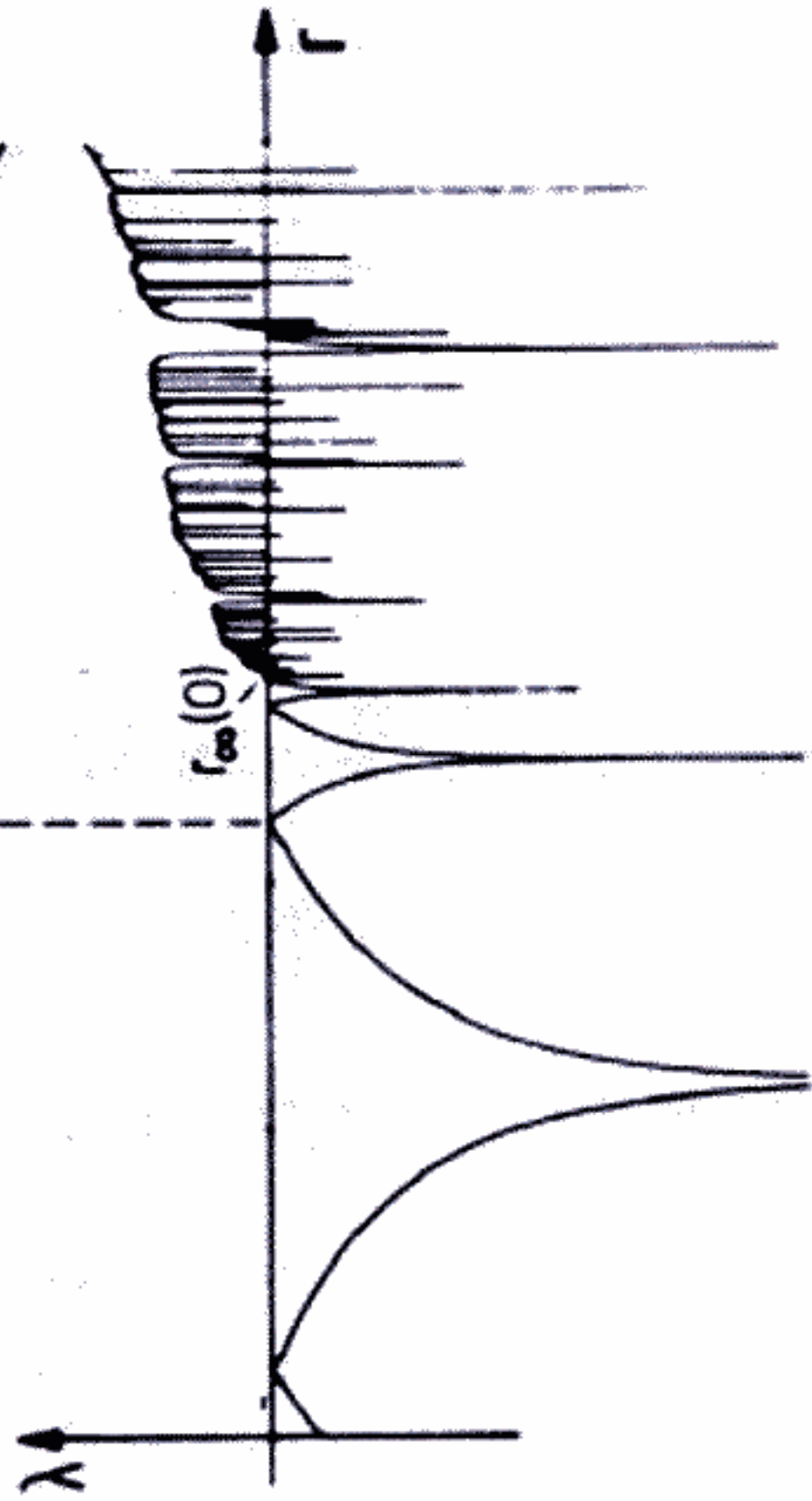
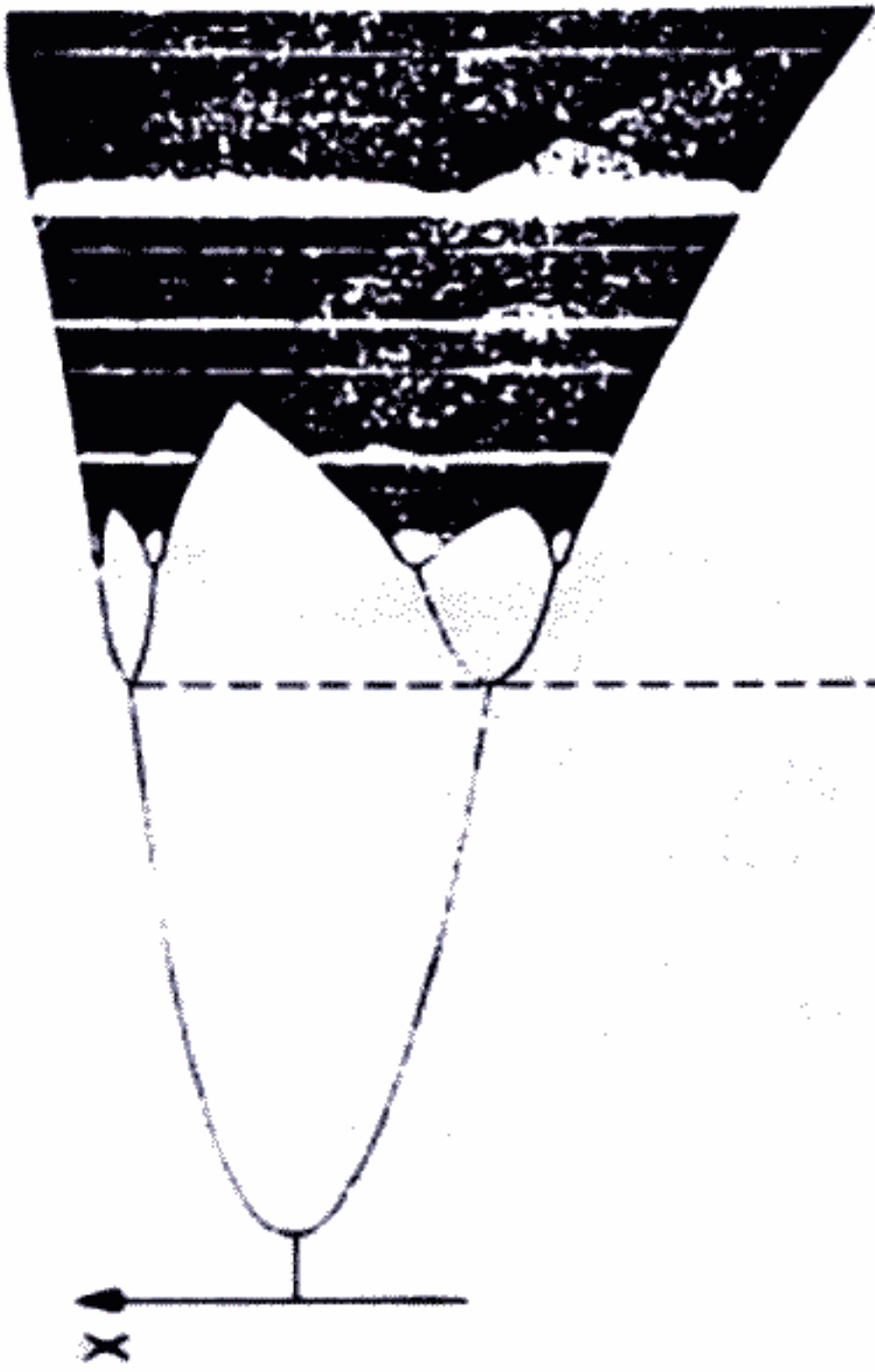
Schwarz'sche Ableitung

(dann auch alle $Sf^n < 0$)

mit stochast. Störungen



ohne



Vorn

fraktale Dimension

hier speziell: Hausdorff-Dimension

gegeben: Punktmenge im d -dimens. Raum

Vorschrift: lege d -dimensionale Kugeln mit Durchmesser λ dicht gepackt hinein und zähle ihre Anzahl N ;
 lasse $\lambda \rightarrow 0$ gehen

so daß Punktmenge überdeckt wird

Skalierungsgesetz

$$N(\lambda) \sim \lambda^{-D} \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0$$

$$D = \lim_{\lambda \rightarrow 0} - \frac{\log [N(\lambda)/N(\lambda')]}{\log [\lambda/\lambda']}$$

Beispiel $d=1$

$\lambda=1$ $N=1$

$\lambda = \frac{1}{3}$ $N=3$

$\lambda = \frac{1}{9}$ $N=9$

$$D = - \frac{\log [1/3]}{\log [1/\frac{1}{3}]} = 1$$

1 1

$\frac{1}{3}$ 2

$\frac{1}{9}$ 4

Cantor-Menge

$$D = - \frac{\log [1/2]}{\log [1/\frac{1}{3}]} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$$

$$L = \lambda \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} \dots \right) = \lambda \left[1 - \frac{1}{3} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^v \right]$$

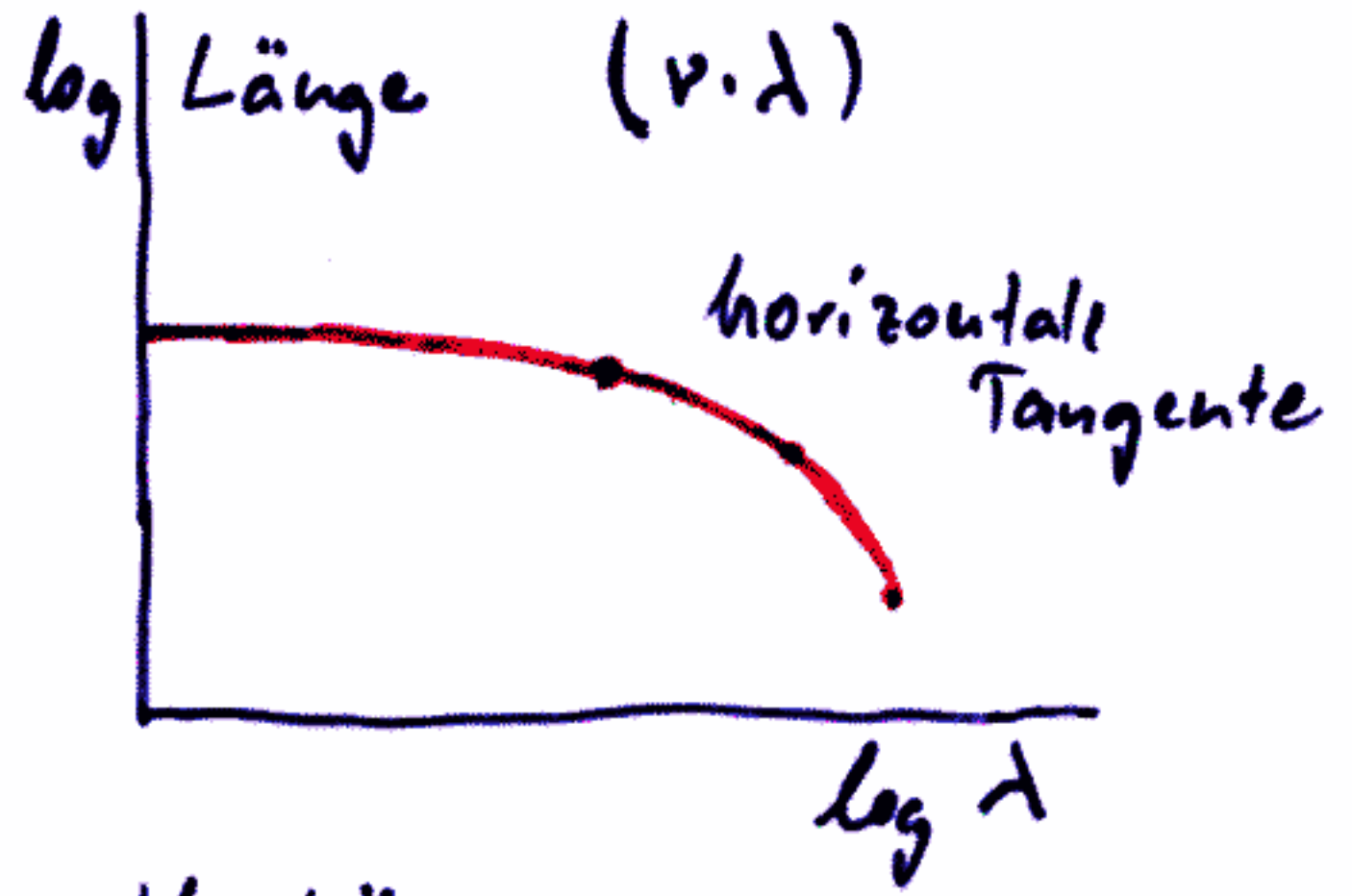
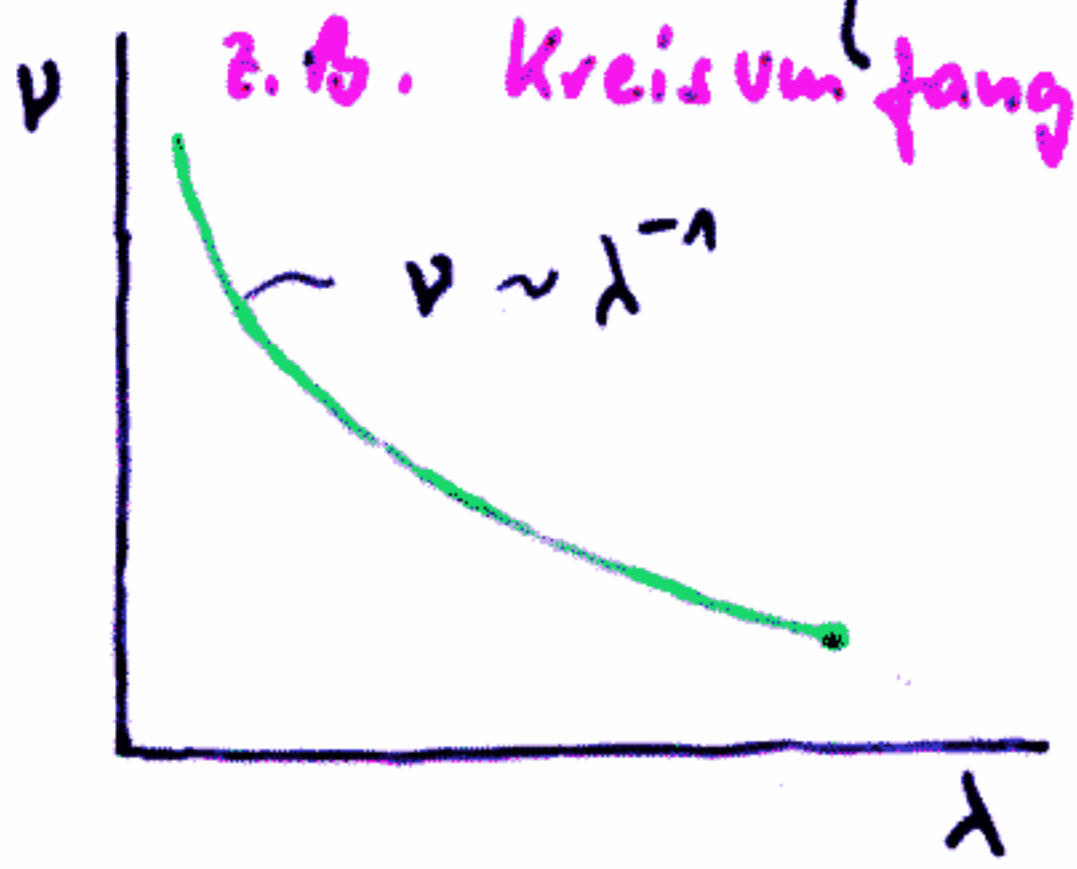
$$= \lambda \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) \right] = 0!$$

praktische Anwendungen des Begriffs fraktale Dimension

A: Wie lang ist die Küste einer Insel (z. B. GB)?
 unterschiedlichste Angaben in Lexika!
 hängt ab von Länge der Meßlatte

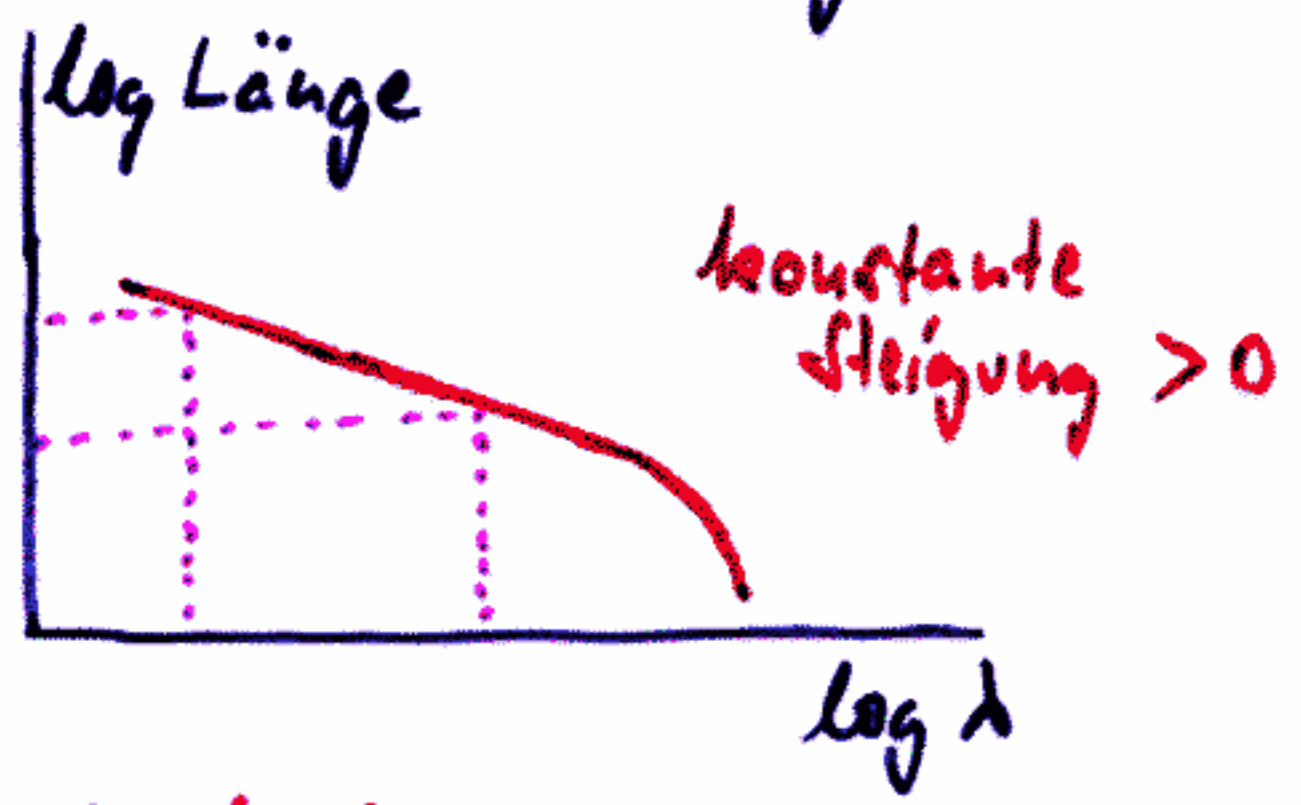


Maß L Anzahl N
 Maß $l = \frac{L}{2}$ $n > 2N$
 λ ν



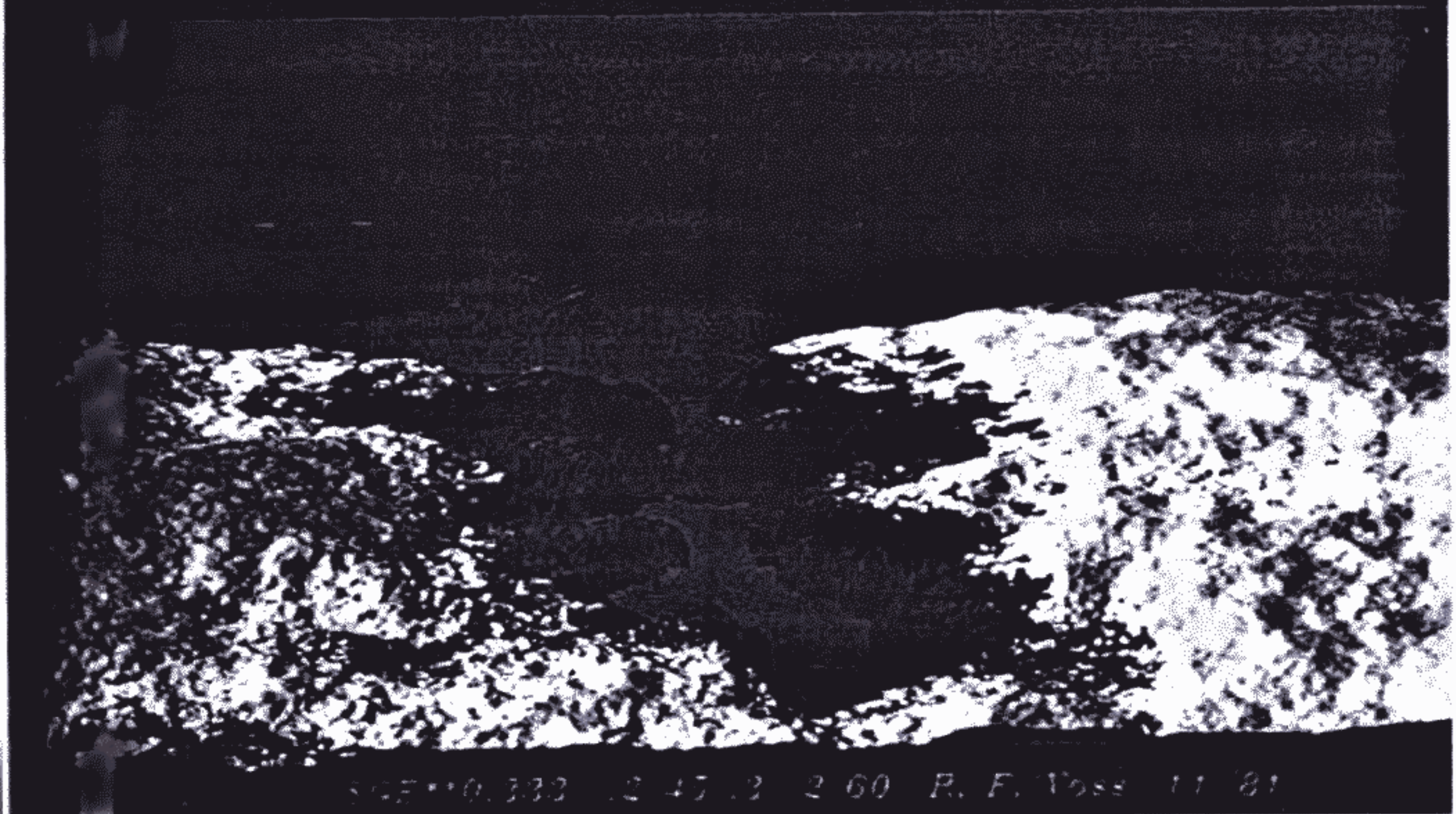
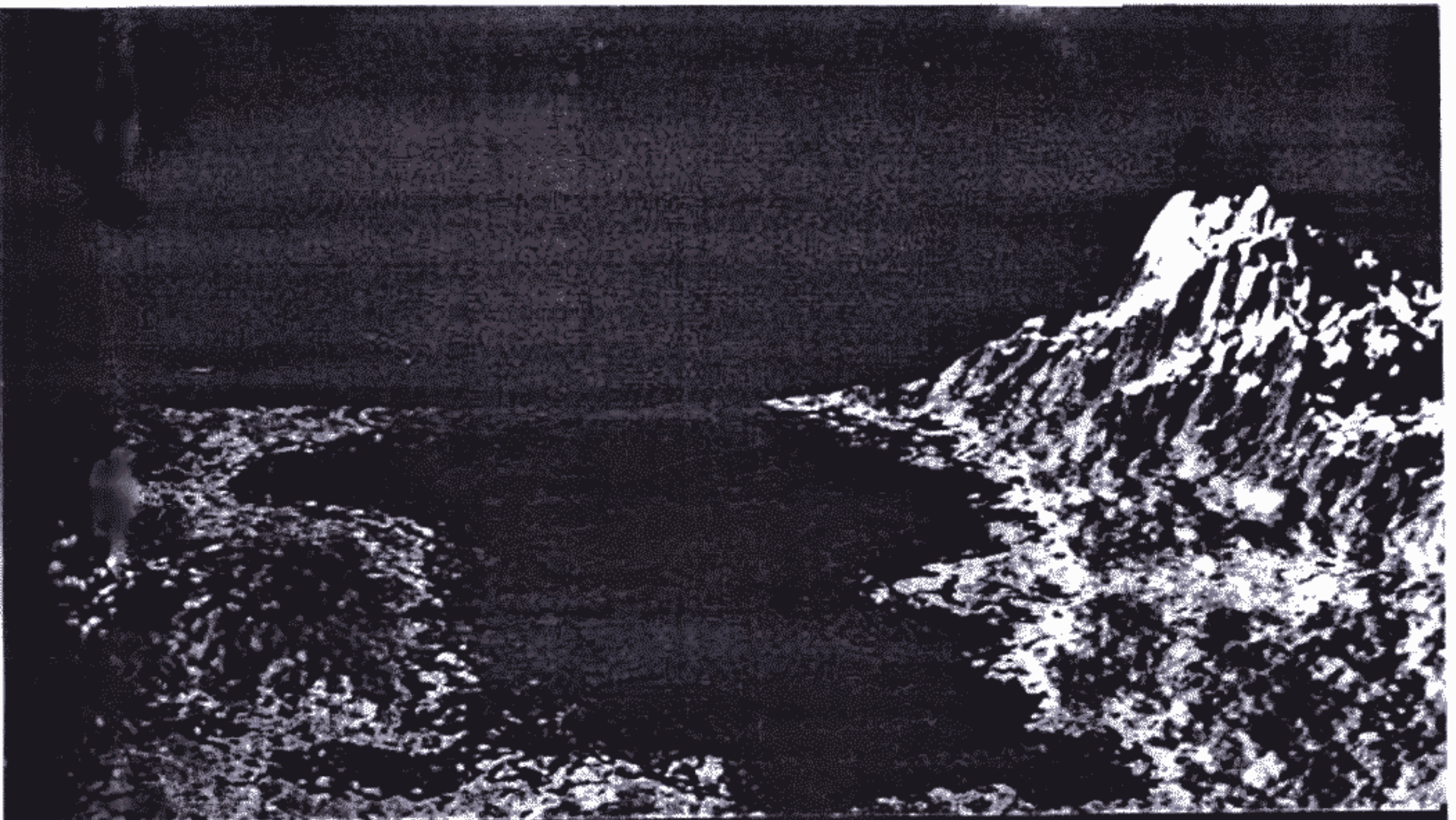
Küstenlänge

allg. Gesetz $\nu \sim \lambda^{-D}$
 $\nu_1 \sim \lambda_1^{-D}$
 $\frac{\nu}{\nu_1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{-D}$
 $D = \lim_{\lambda \rightarrow 0} - \frac{\log(\nu/\nu_1)}{\log(\lambda/\lambda_1)}$



Kreis: $D = 1$ Linie
 Küstenlinie: $1 < D < 2$ weder Linie noch Fläche
 (Mannigfaltigkeit von fraktalem Maß)

2 < D < 3



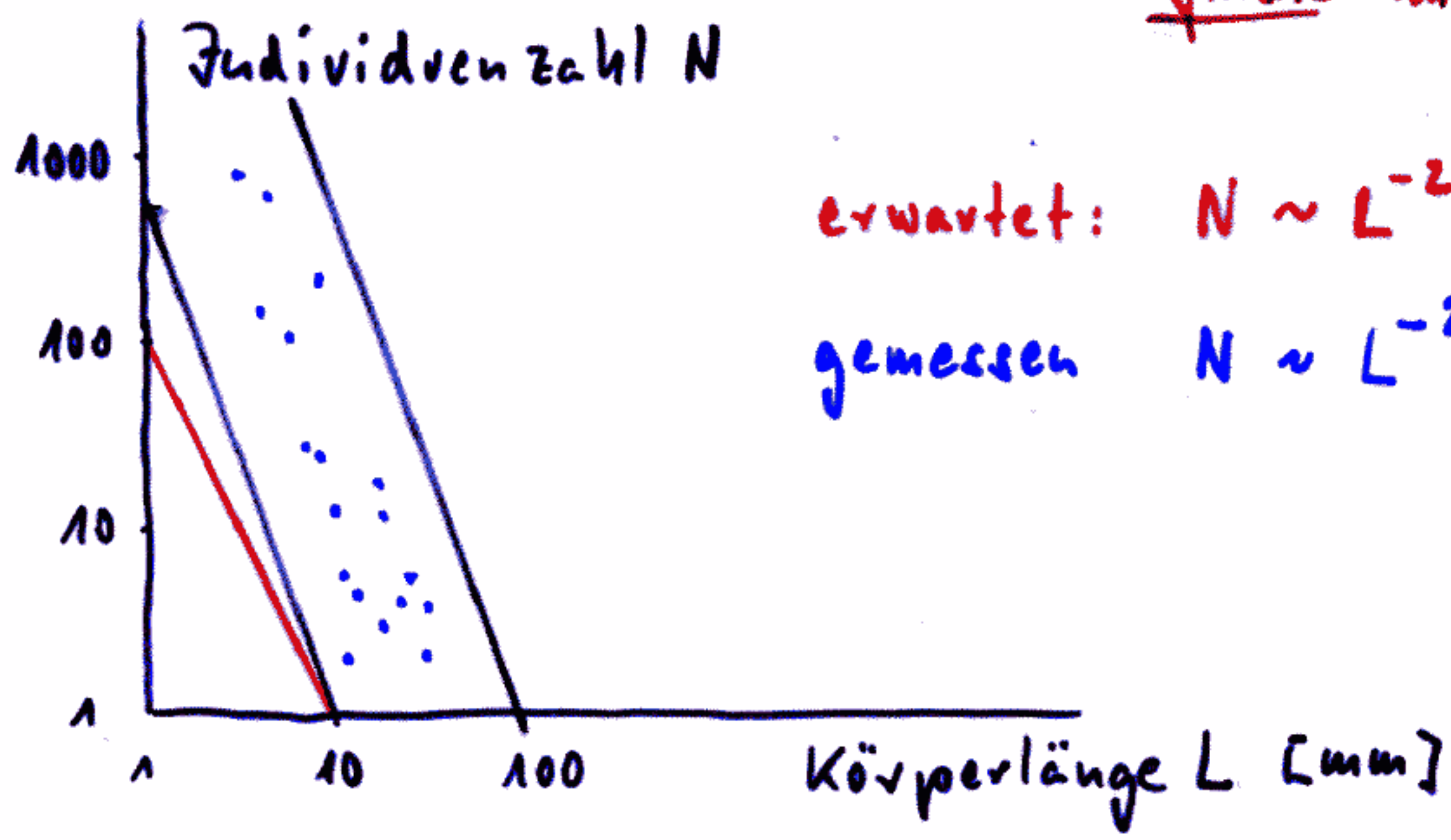
SCF 10.332 2 47 2 2 60 R. F. Voss 11 81

B: Wieviele Käfer passen auf ein Blatt?

Körperlänge L Anzahl N

L	c	}
L/2	c · 4	
L/x	c · x ²	

erwartet,
Ausnahme Blattober-
fläche mit D=2

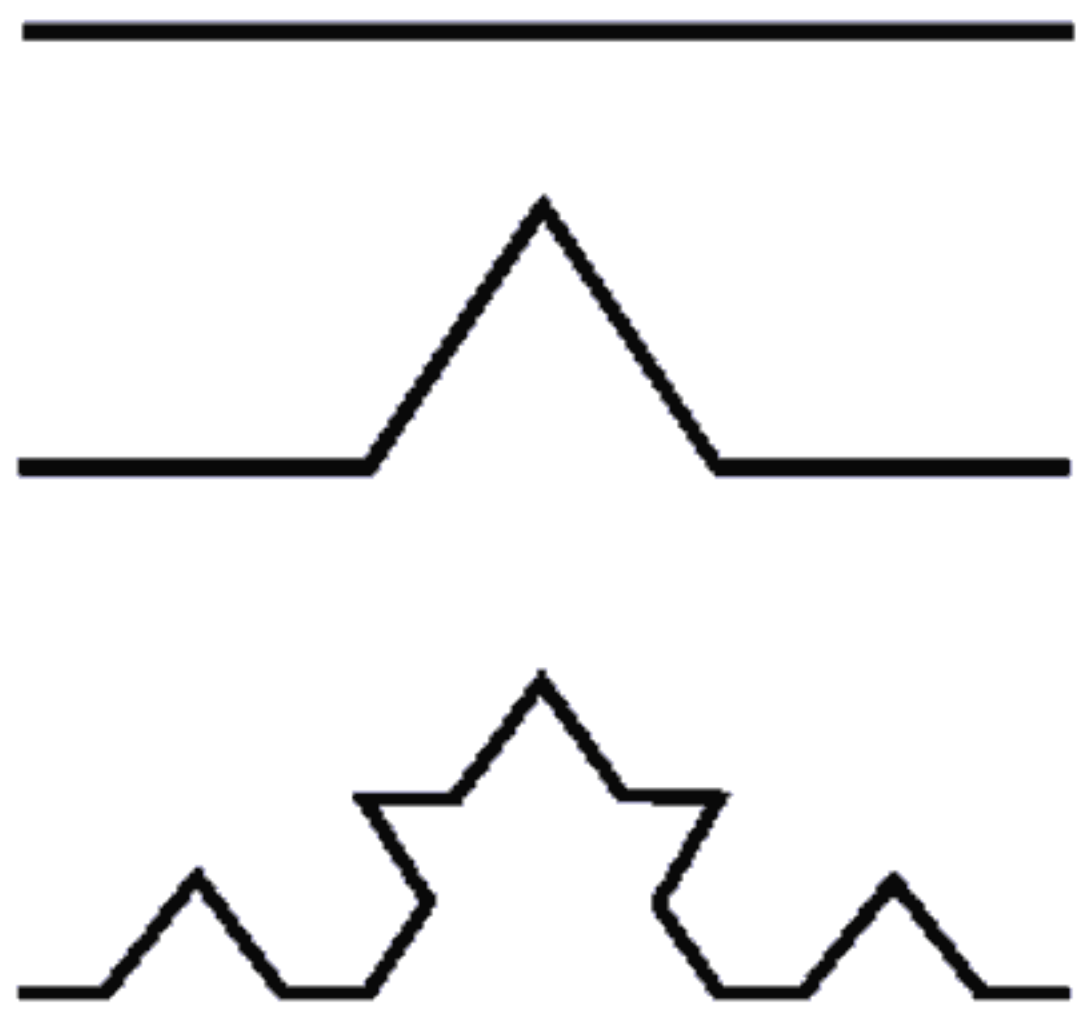


erwartet: $N \sim L^{-2}$
gemessen $N \sim L^{-2.78}$

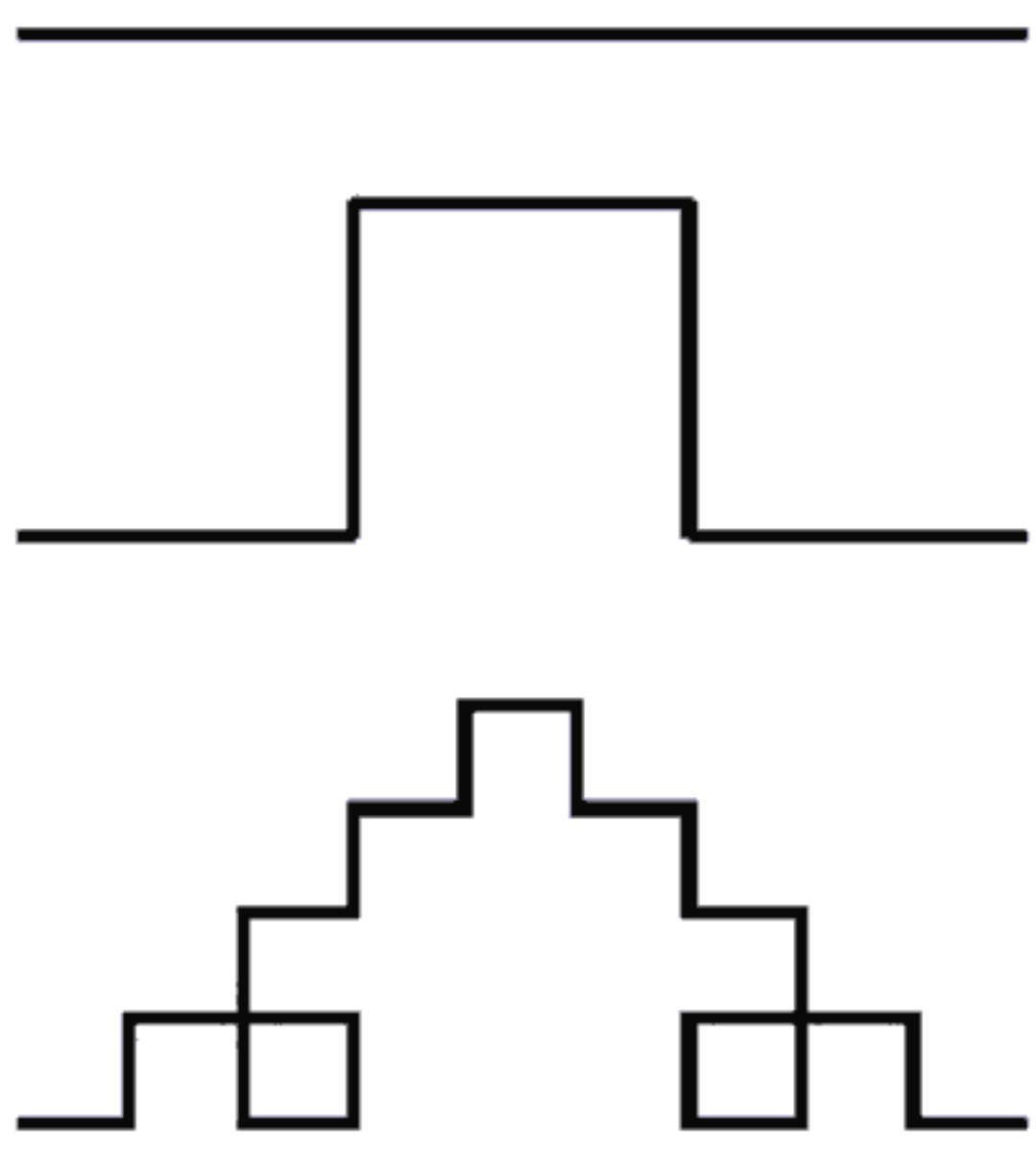
z. B. $x = 10$
 $x^2 = 100$
 $x^{2.78} = 600$

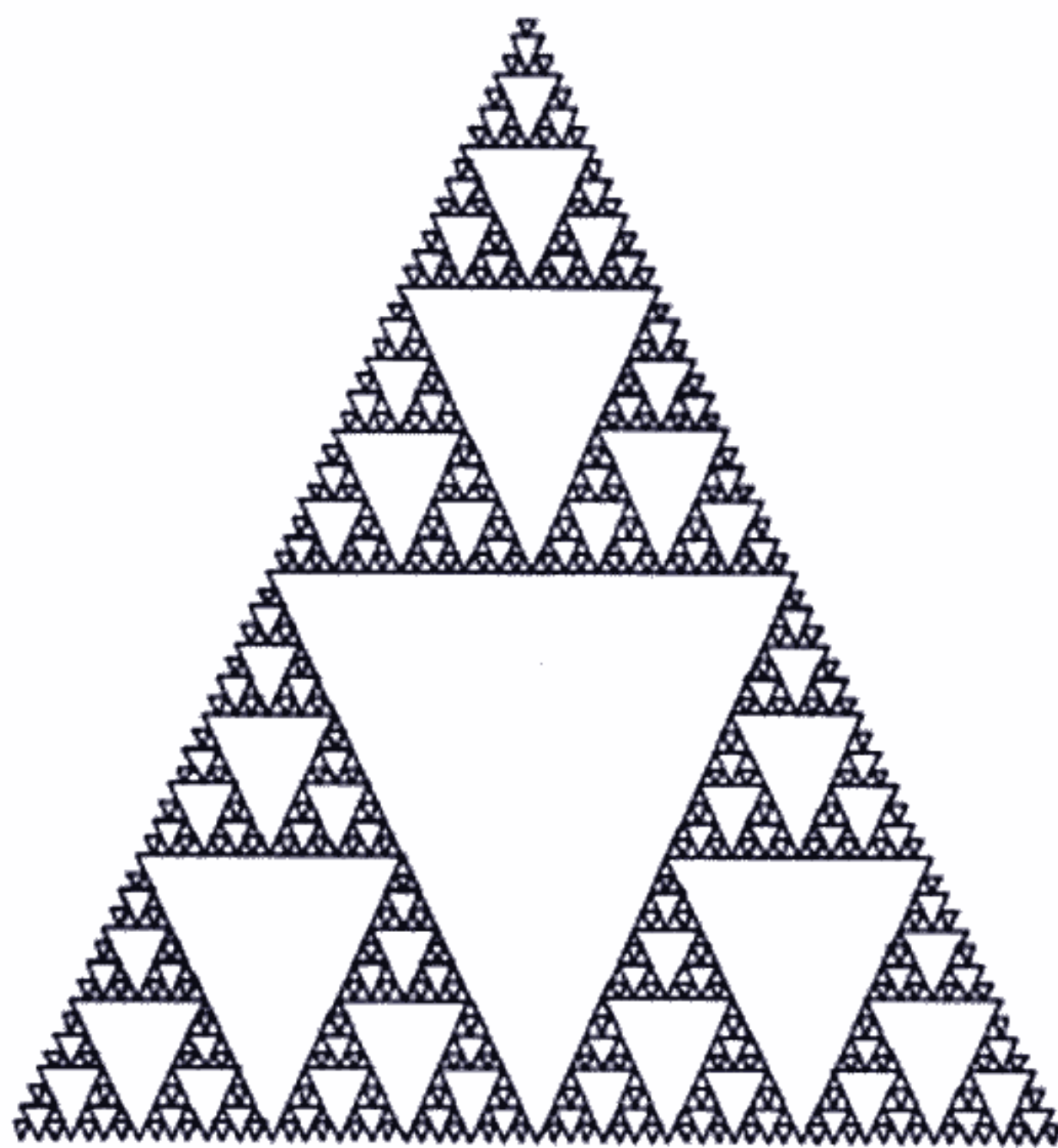
sechsmal so viele Gliederfüßer
wie erwartet

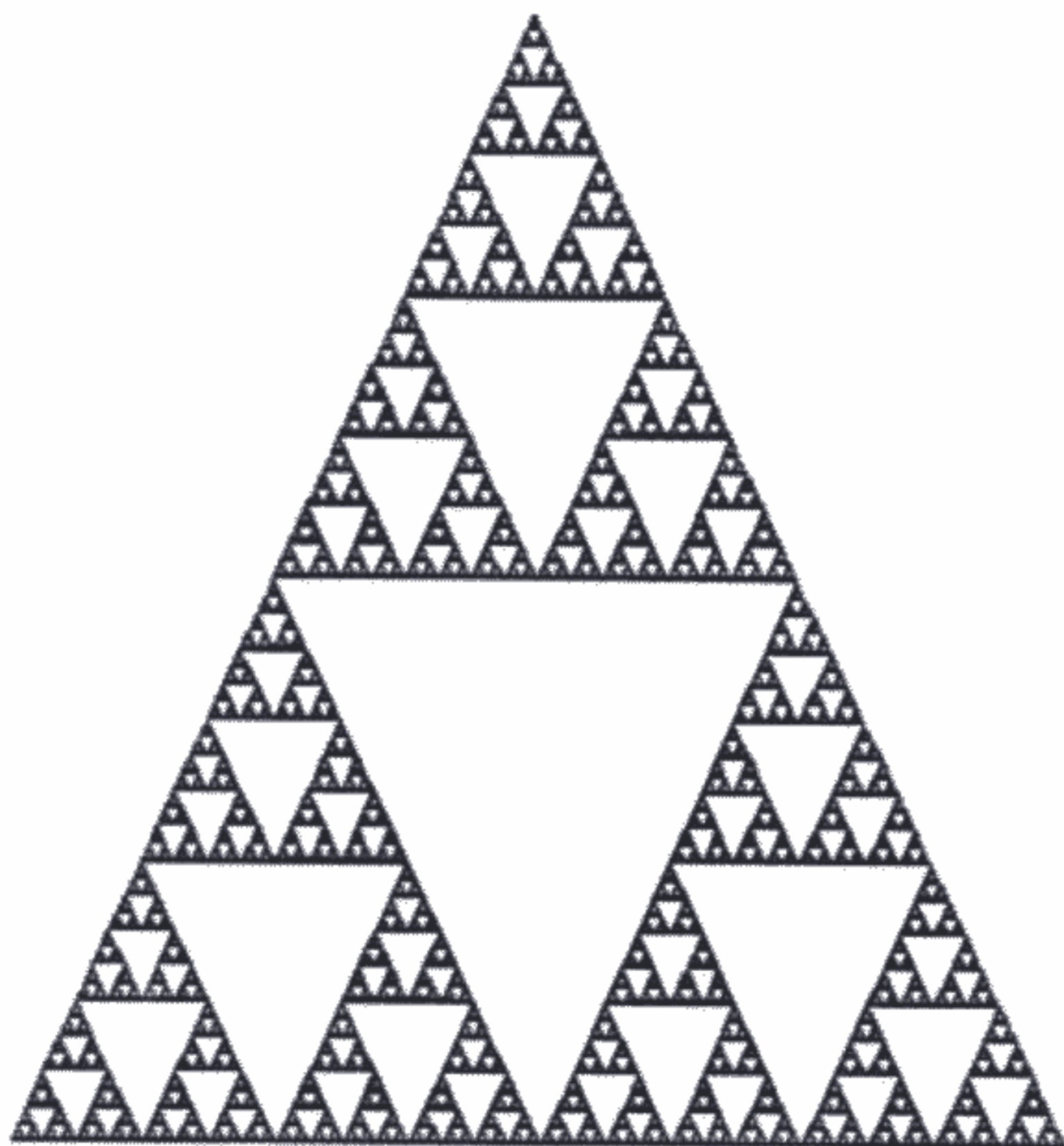
Koch-Kurve (Dreieck)



Koch-Kurve (Rechteck)







Weiteres diskretes Modell:

$$z_{k+1} = z_k^2 - c \quad ; \quad z, c \text{ komplex}$$

$$= f_c(z_k)$$

1.) c gegeben, z. B. $c = 0.194 - 0.6557i$

? Bereich für $z_0 \rightarrow$ Attraktor (Bassin)
 z. B. $z^* =$ Mer Zyklus
 $z^* = \infty$

? Grenze zwischen zwei Basins

$$J_c = \text{Grenze von } \{ z \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) \rightarrow \text{Attraktor} \}$$

Julia-Menge \quad - zusammenhängend
 \quad - nicht "

2.) z_0 gegeben, z. B. $z_0 = 0$

? Bereich der Parameterwerte c , für die J_c zusammenhängend ist

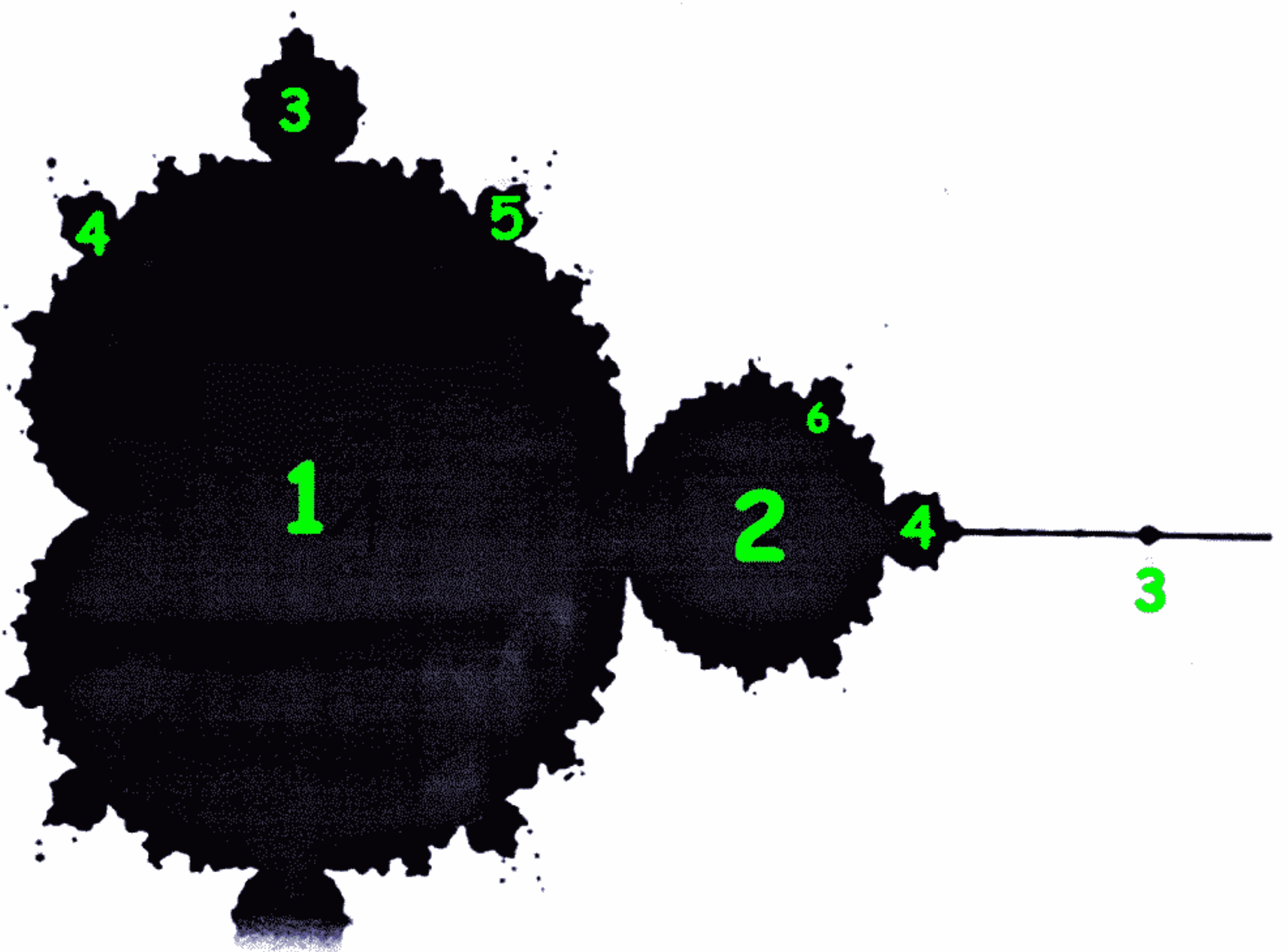
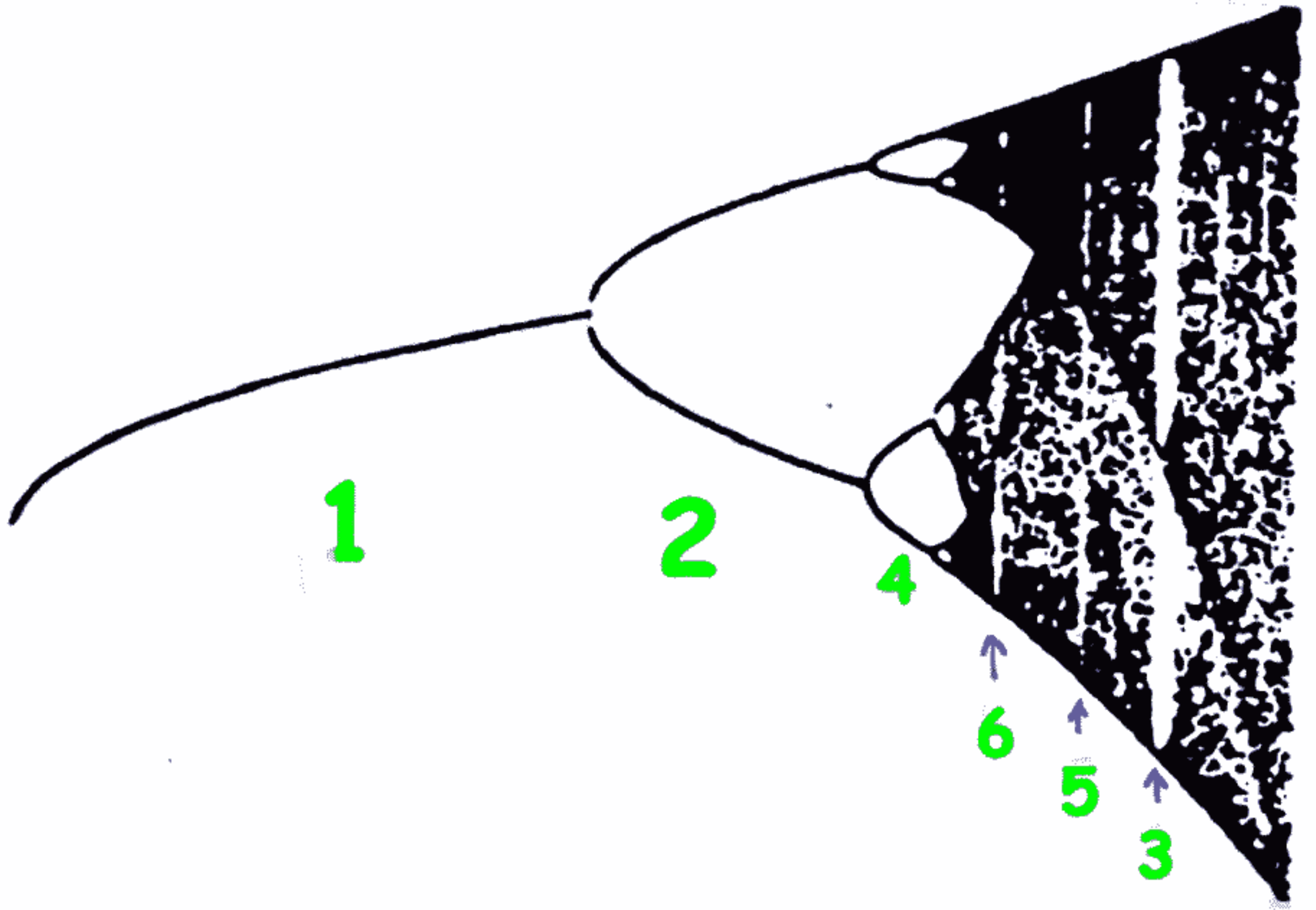
(dann u.u.d. wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \rightarrow \infty$)

$$M = \{ c \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \rightarrow \infty \}$$

Mandelbrot-Menge

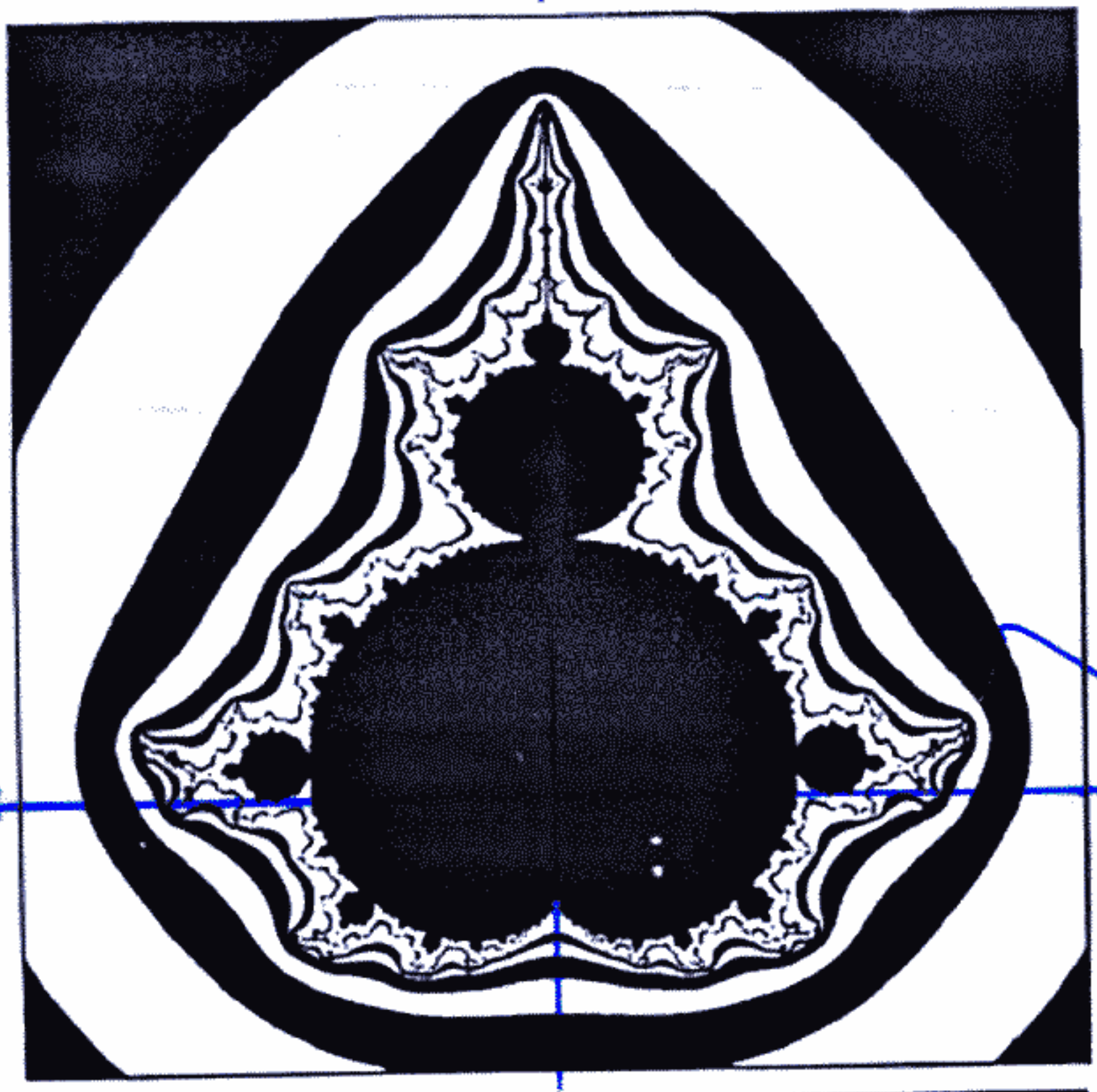
zusammenhängend

fraktale Struktur



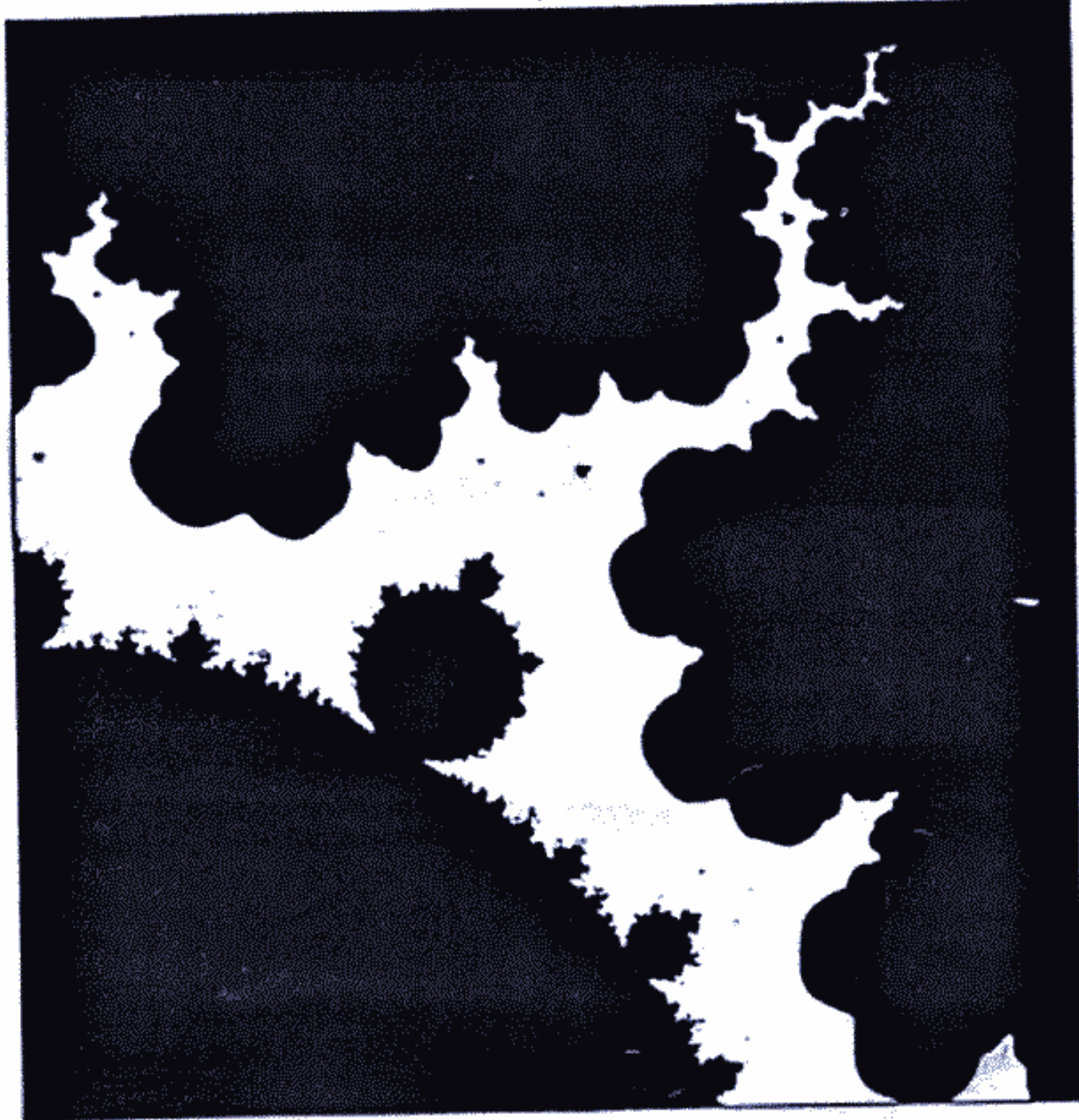
Mandelbrot - Menge
(Apfelmännchen)

$A_{Im}(c)$



$Re(c)$

Linien gleicher
Divergenzrate



Ausschnitt: Hvergr.

$$x_{k+1} = r x_k (1 - x_k)$$

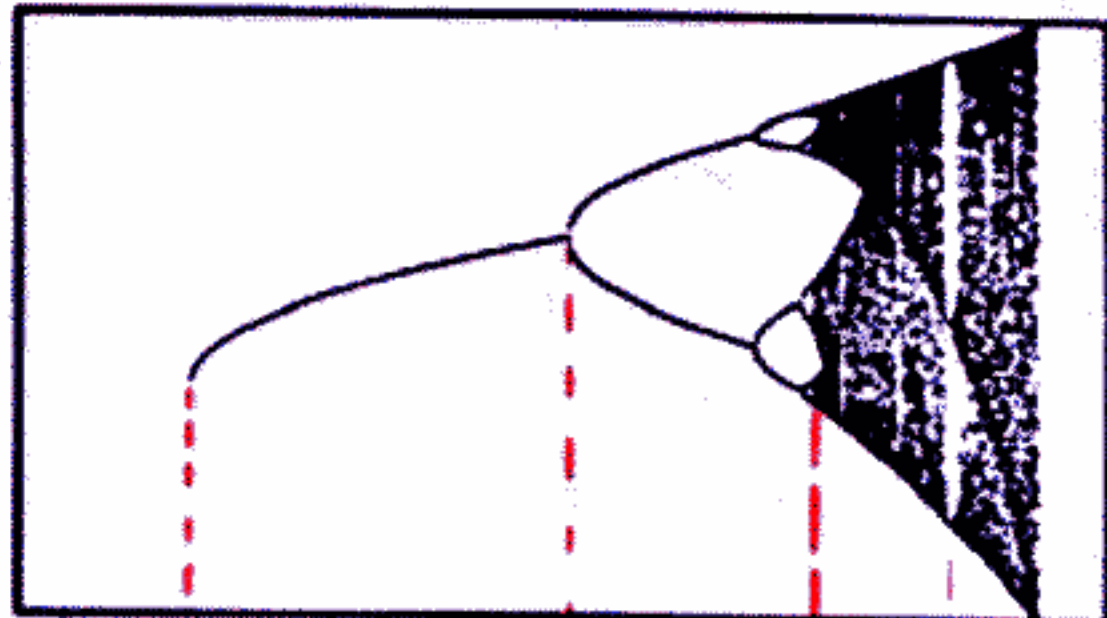
$$z_{k+1} = z_k^2 + c$$



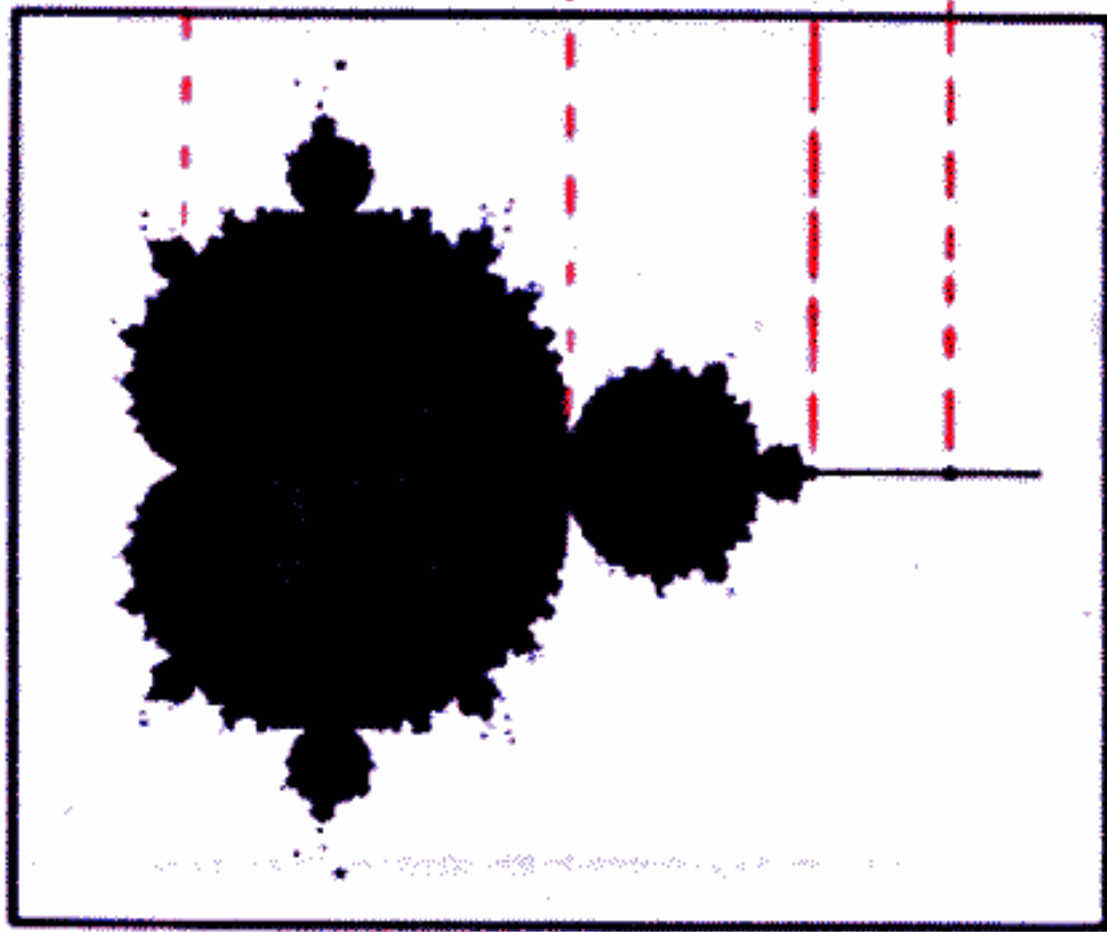
$$x = \frac{1}{2} - \frac{r}{4}$$

$$c = -\frac{r}{4} (2r - r^2)$$

Feigenbaum



Apfelmännchen

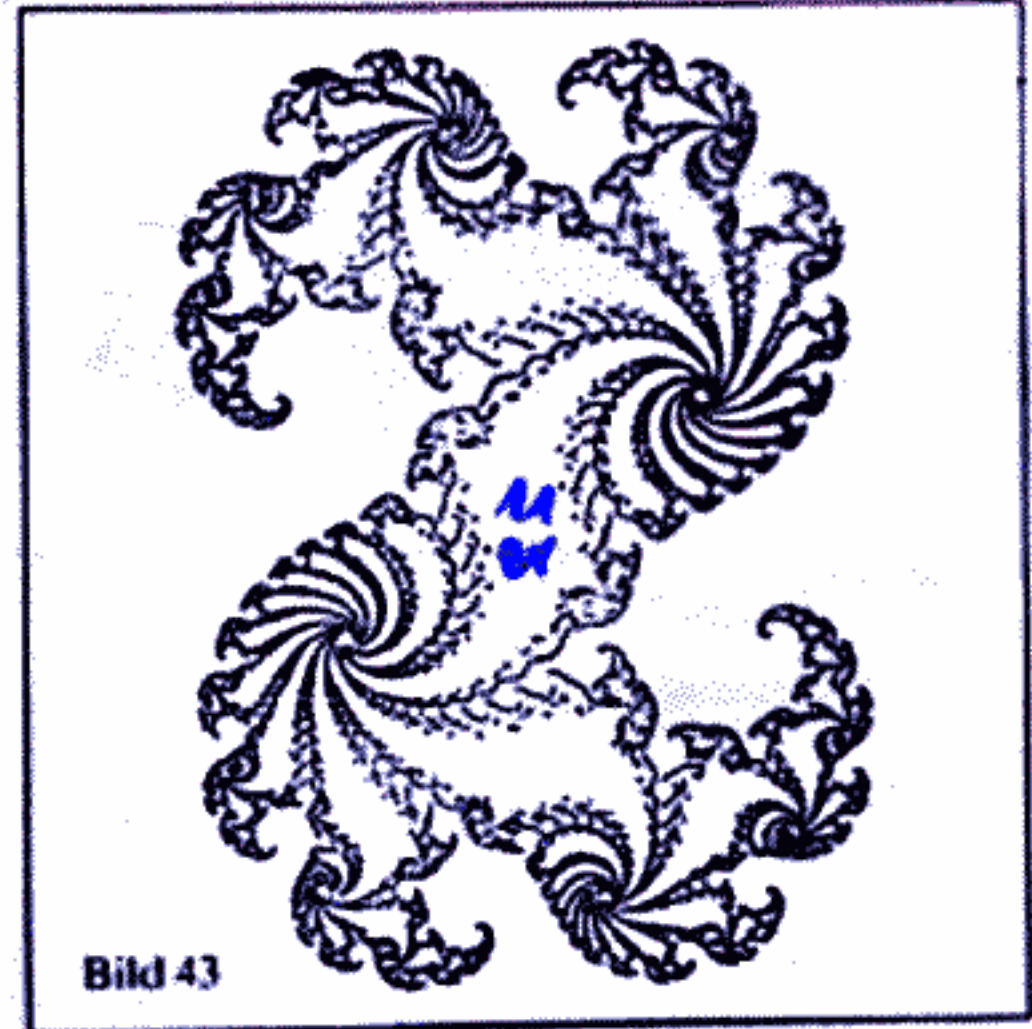
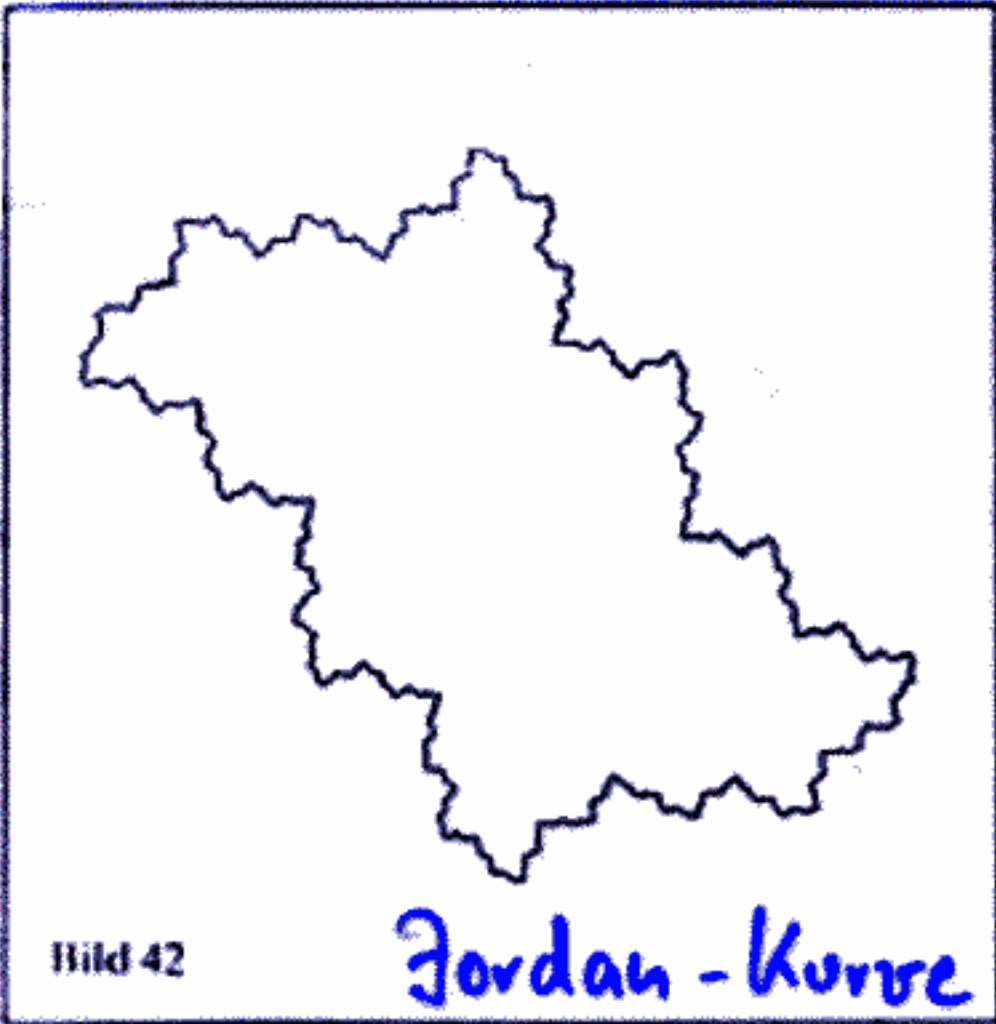


schwarz : konvergent
(liegen im Attraktor)

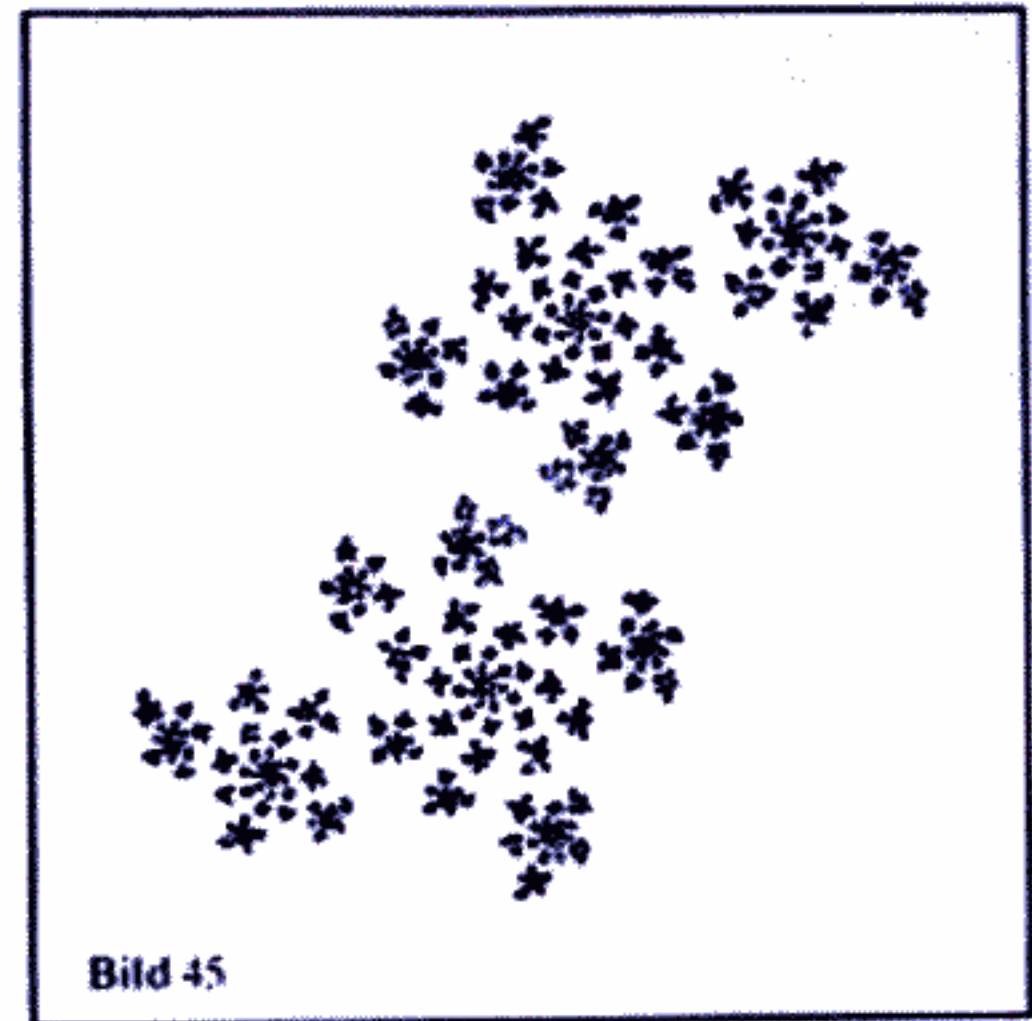
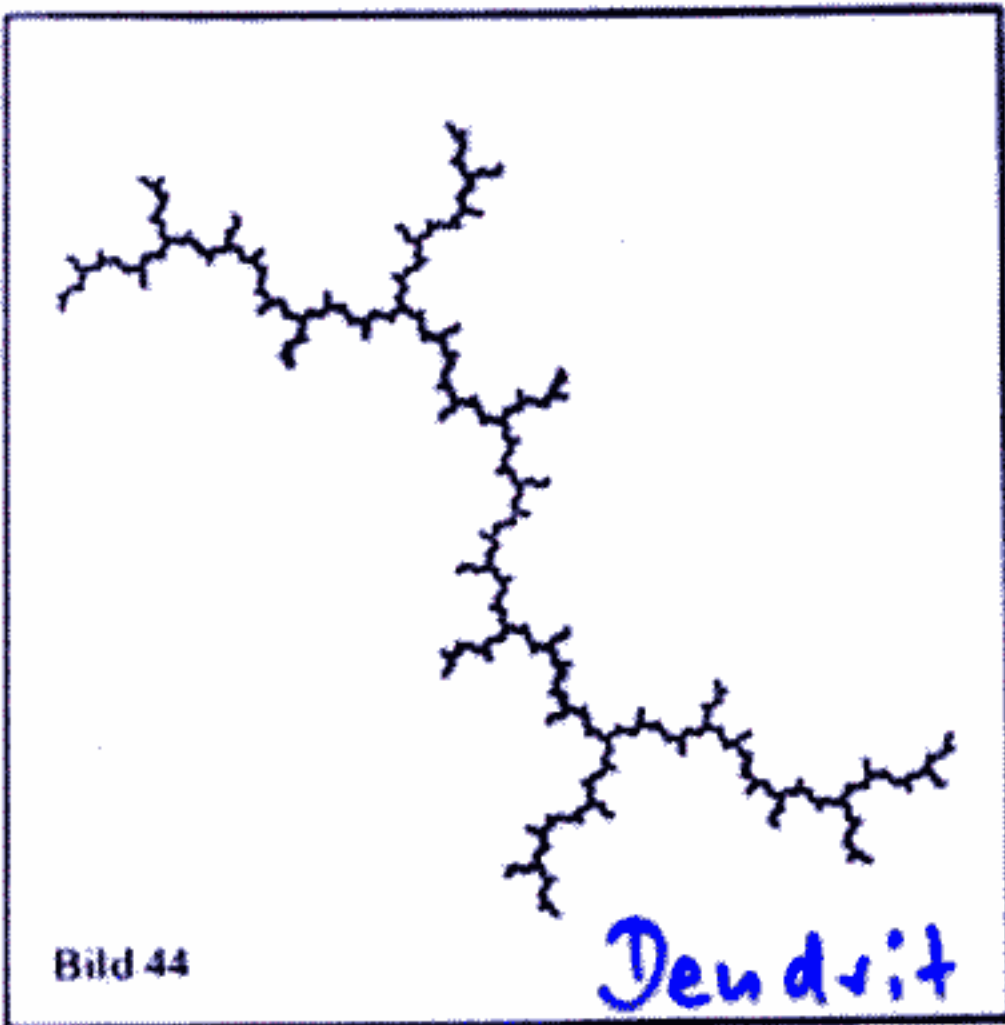
weiß : divergent

gilt für $z_0 = 0$

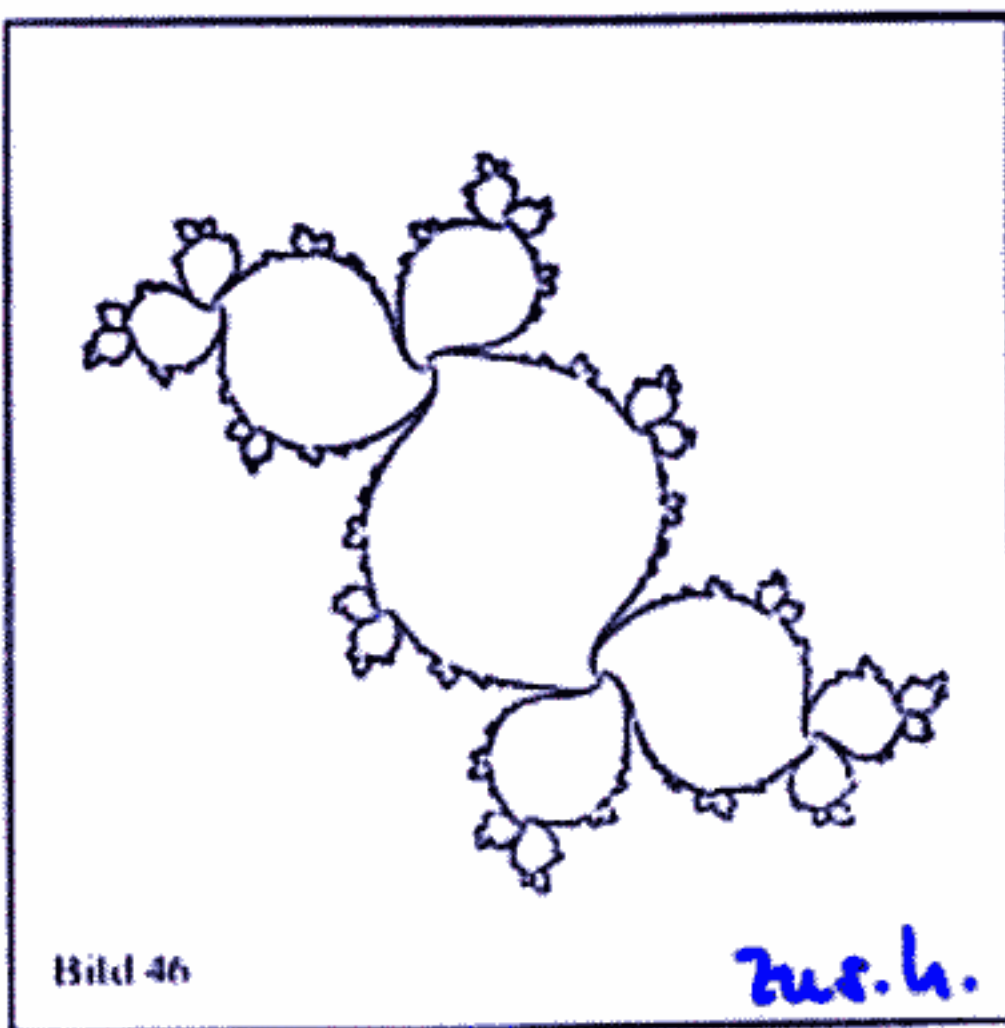
Julia-Mengen in z-Ebene



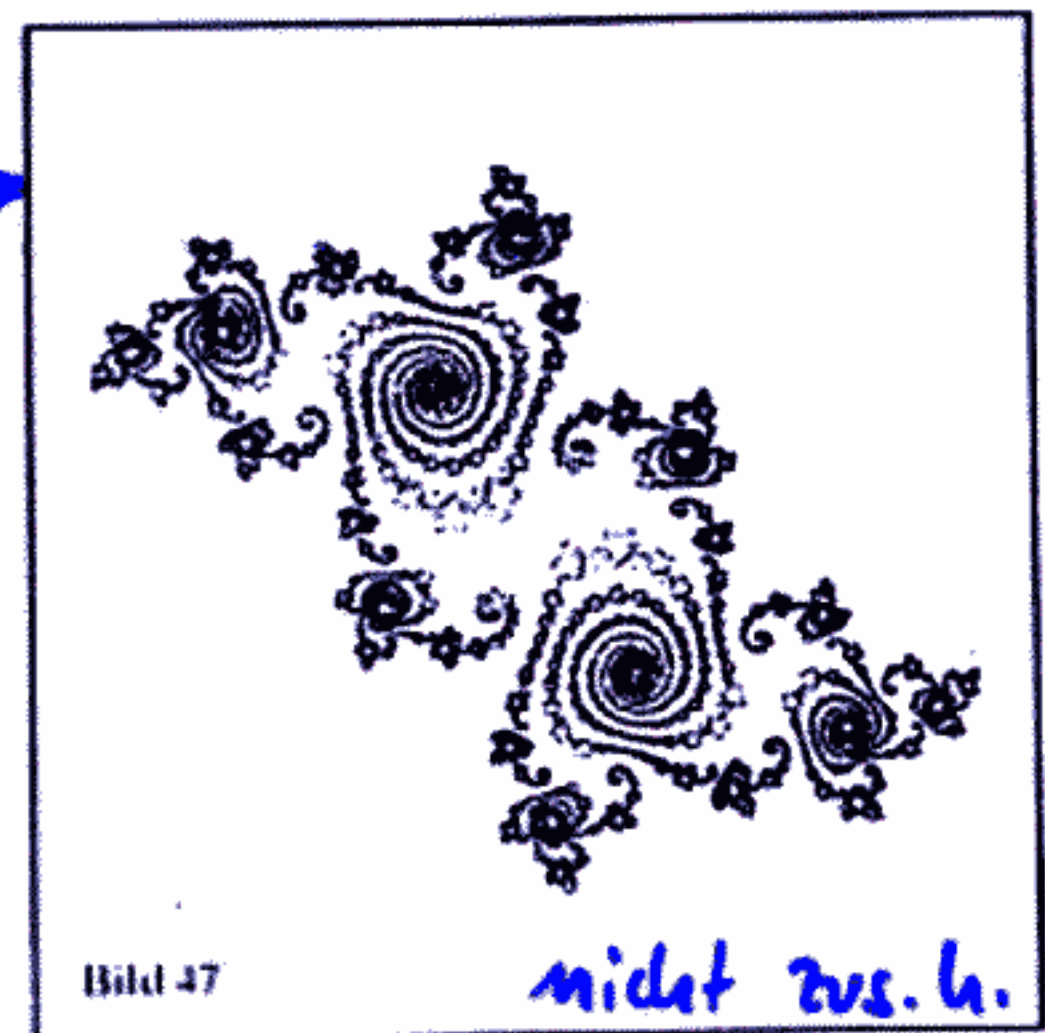
zus. h.



nicht
zus. h.
(Cantor-
Menge)



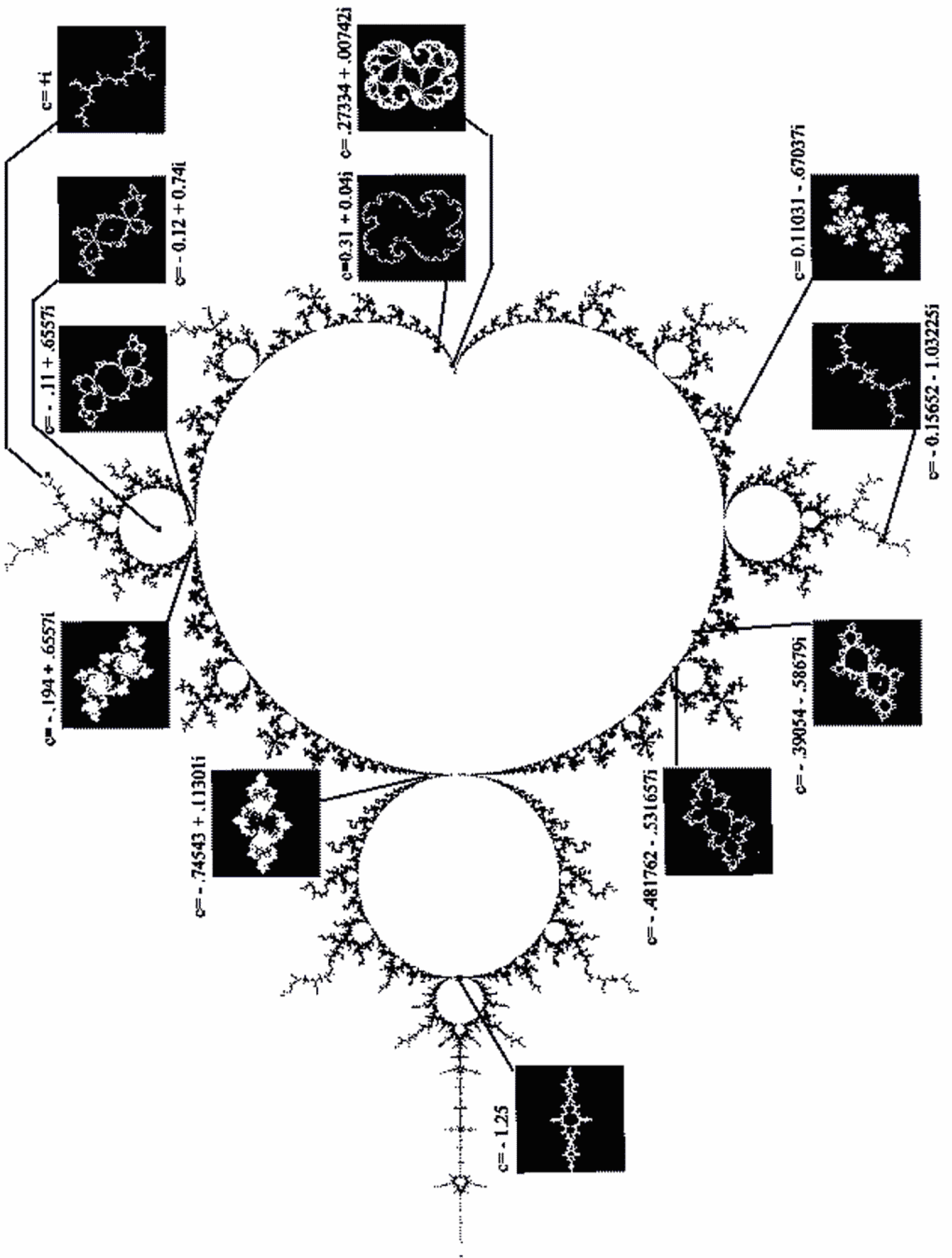
kleine
Variation
von c



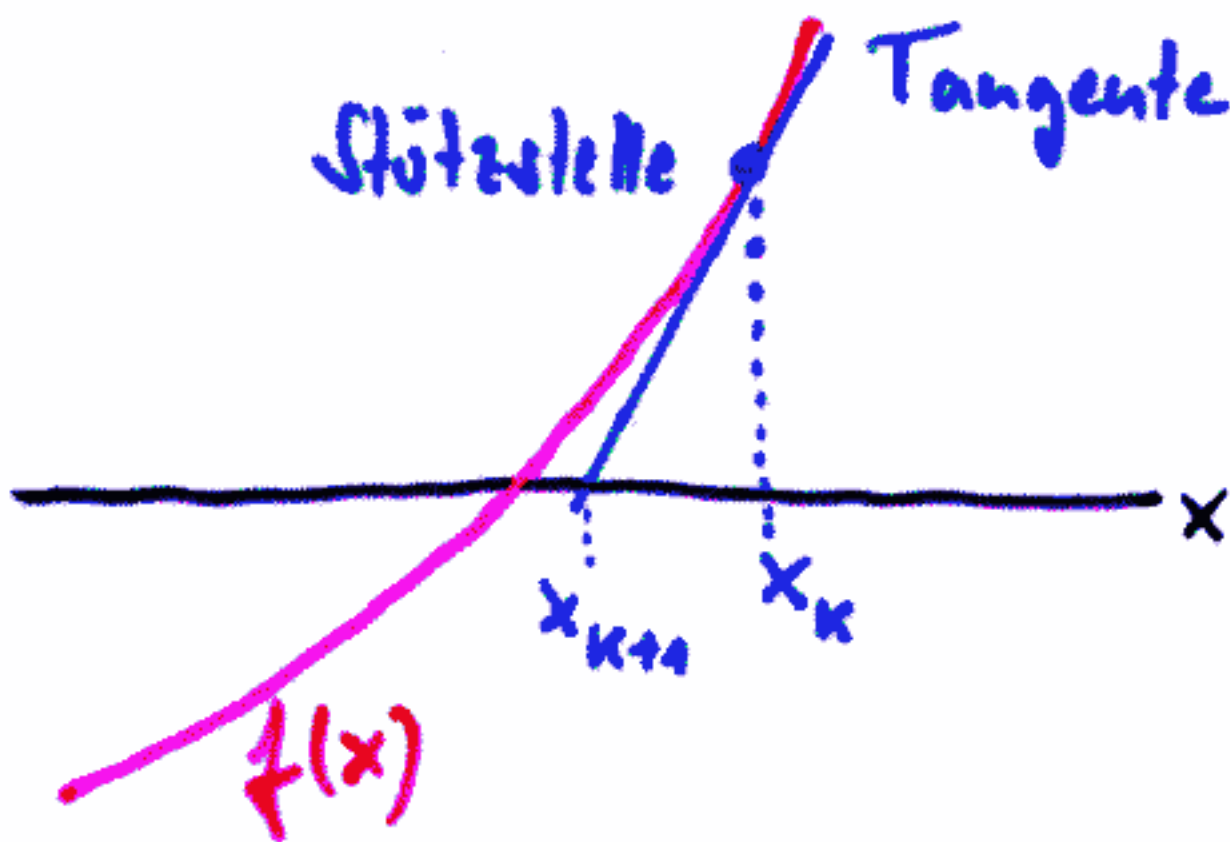
Typische Formen von Julia-Mengen

Bild 42: eine Jordankurve; Bild 43: eine nur noch zusammenhängende Julia-Menge als Grenze zwischen zwei Bassins; das innere Bassin gehört zu einem Zykel der Periode 11; Bild 44: ein Dendrit;

Bild 45: eine Cantor-Menge, bei der der fehlende Zusammenhang deutlich erkennbar ist; Bild 46: eine zusammenhängende Julia-Menge kurz vor dem Zerfall in eine Cantor-Menge; Bild 47: die Cantor-Menge, die daraus bei geringer Variation des Parameters entsteht.



C: Konvergenzanalyse eines Iterationsverfahrens
 hier: Newton-Raphson-Methode für Nullstellen

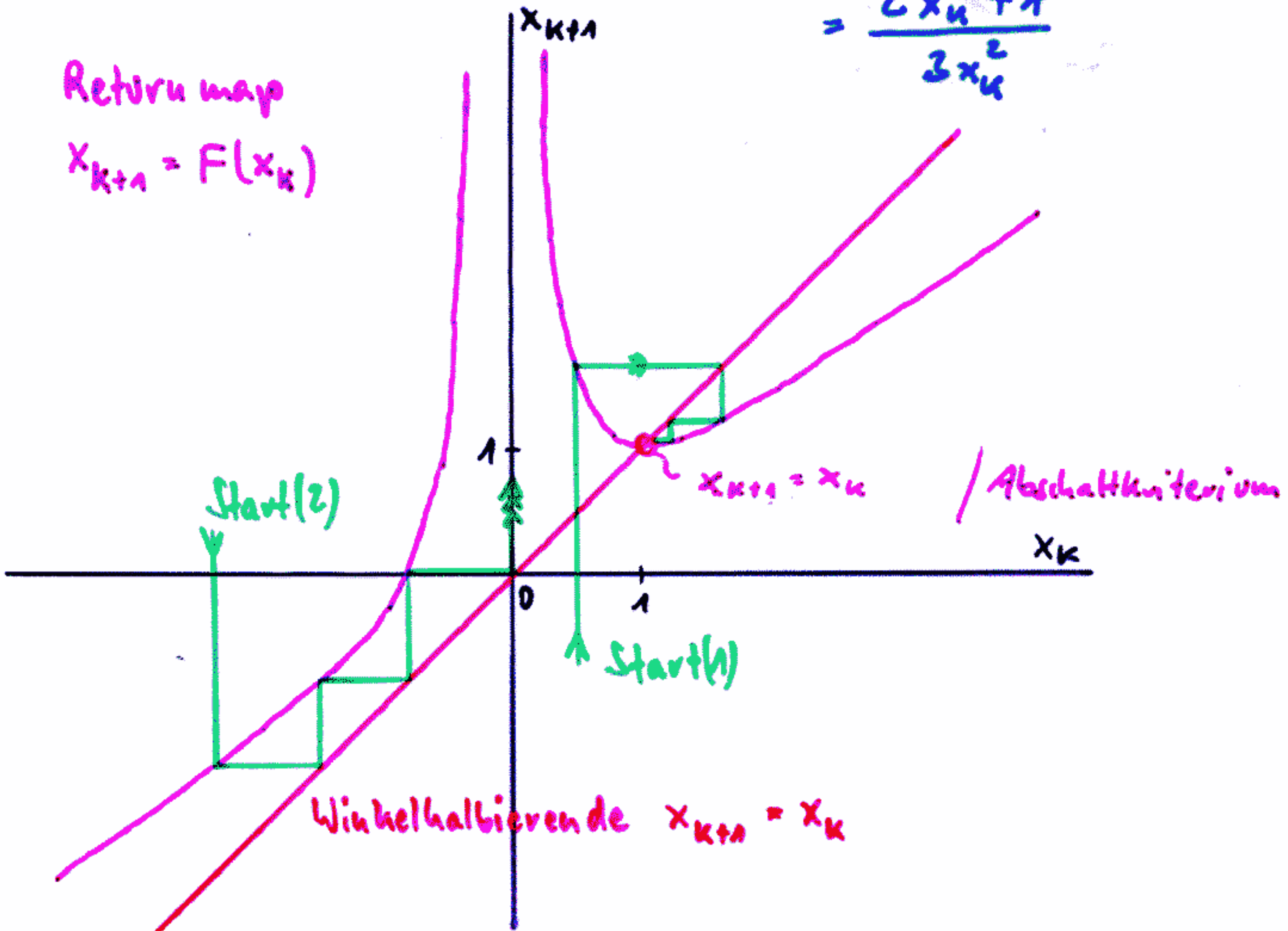


Iterationsvorschrift $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$f(x) = x^3 - 1$
 $f'(x) = 3x^2$

$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 1}{3x_k^2}$
 $= \frac{2x_k^3 + 1}{3x_k^2}$

Return map
 $x_{k+1} = F(x_k)$



gleiche Aufgabe wie zuvor, aber zweidimensional

$$z^3 - 1 = 0$$

$$z = x + iy$$

3 Lösungen

$$z^3 = \underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_1 - i \underbrace{(y^3 - 3yx^2)}_0$$

Newton-Raphson

$$z_{k+1} = z_k - f(z_k) \cdot \nabla^{-1} f(z_k)$$

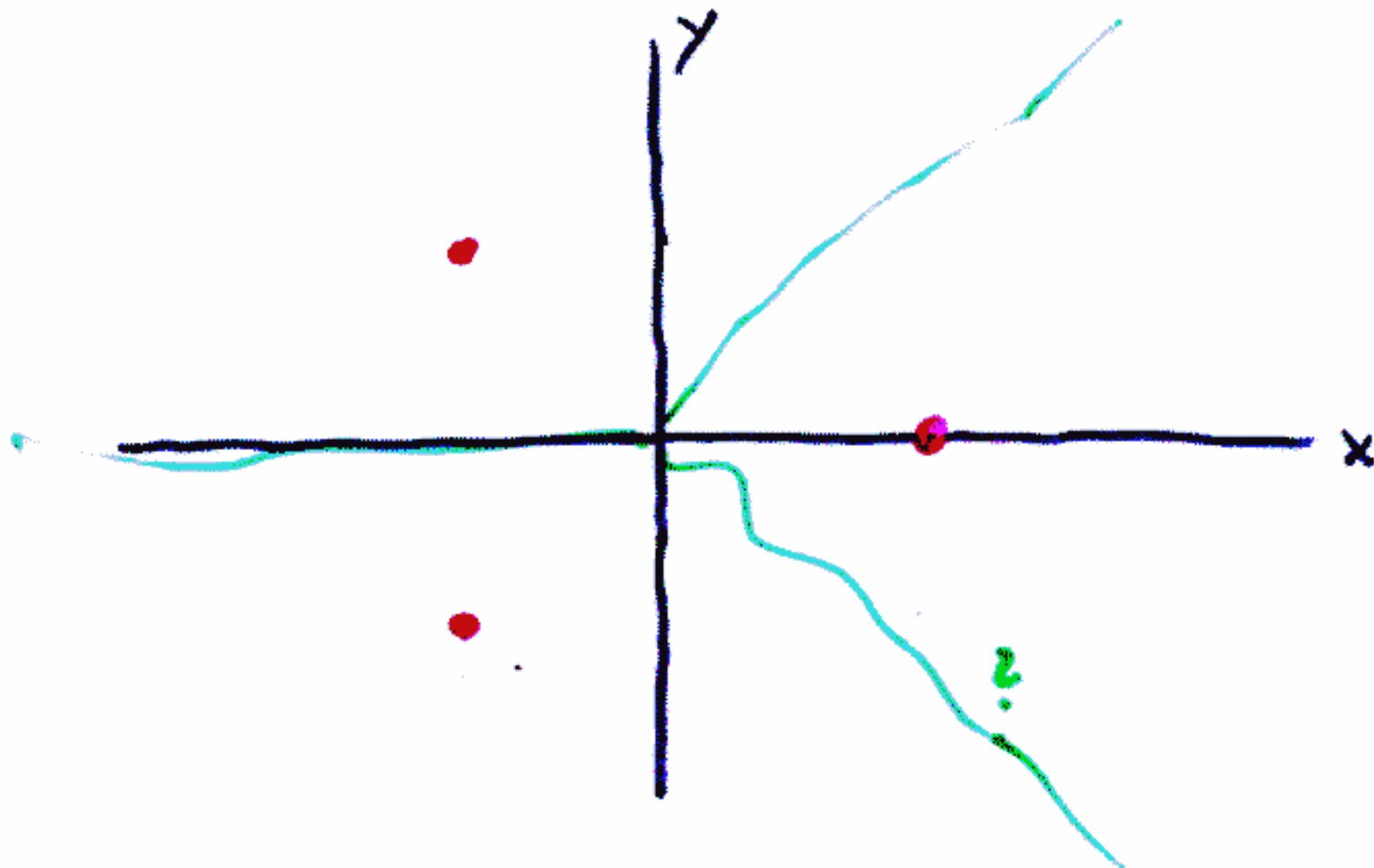
Grad. vektor

1 reelle Lösung

2 konjugiert komplexe Lösungen

$$\bar{z} = -e^{2\pi i k/3} \sqrt[3]{2}$$

$$k = 0, 1, 2$$



3 Attraktoren (Fixpunkte) •

? Wie sieht die Grenze zw. den Basins aus

fraktal

Selbstähnlich

d.h. Lösung empfindlich gegen Startwert z_0

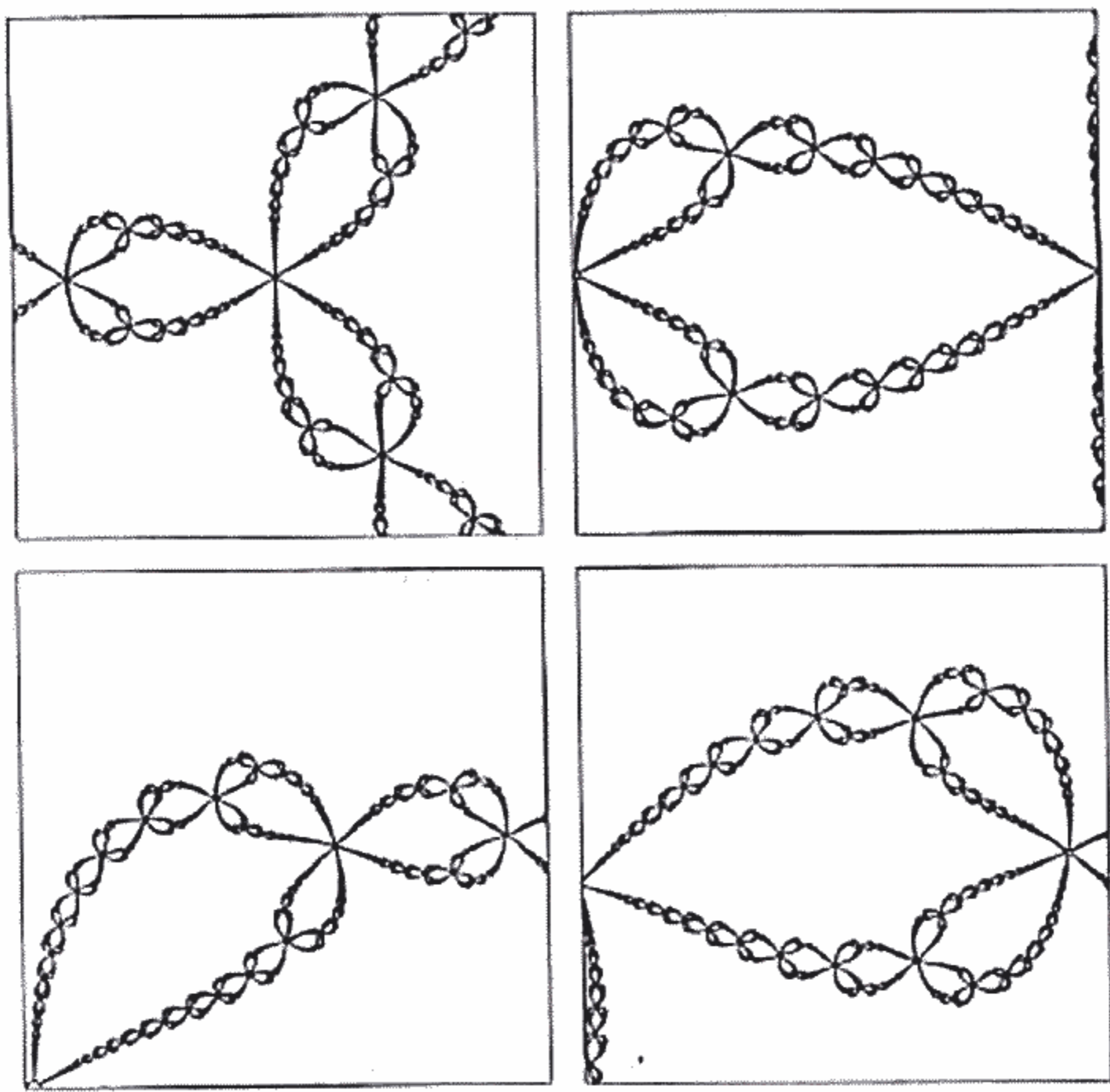
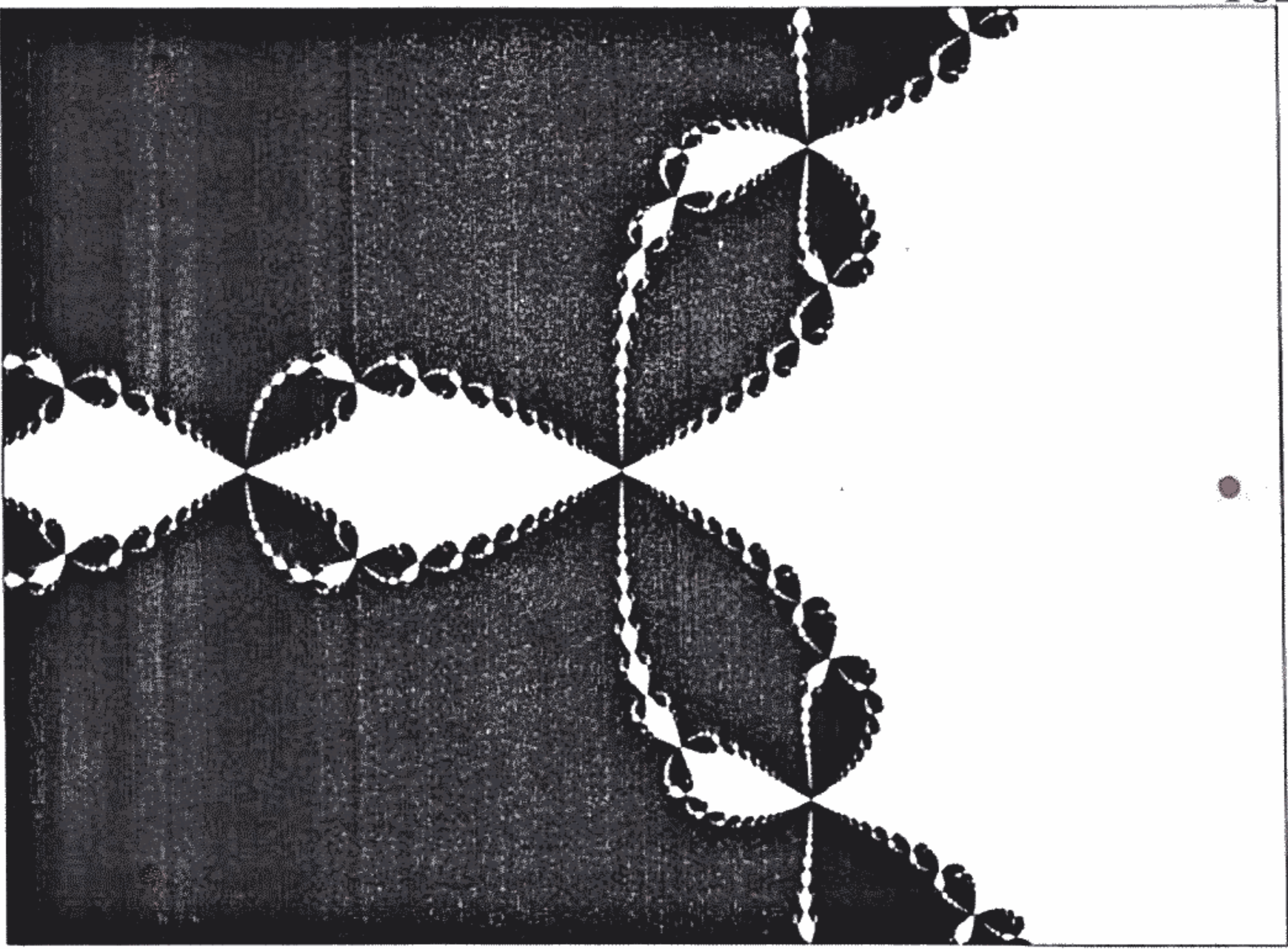


Fig. 43. The Julia set of (6.13) and three close ups

4.6 System Dynamics (SD) J. W. Forrester, MIT
 Industrial
 Urban
 World
 Grundzüge einer Systemtheorie
 Vlg. Gabler, Wiesbaden, 1972

E. Zwicker: Simulation und Analyse dynamischer Systeme, de Gruyter, Berlin, 1981

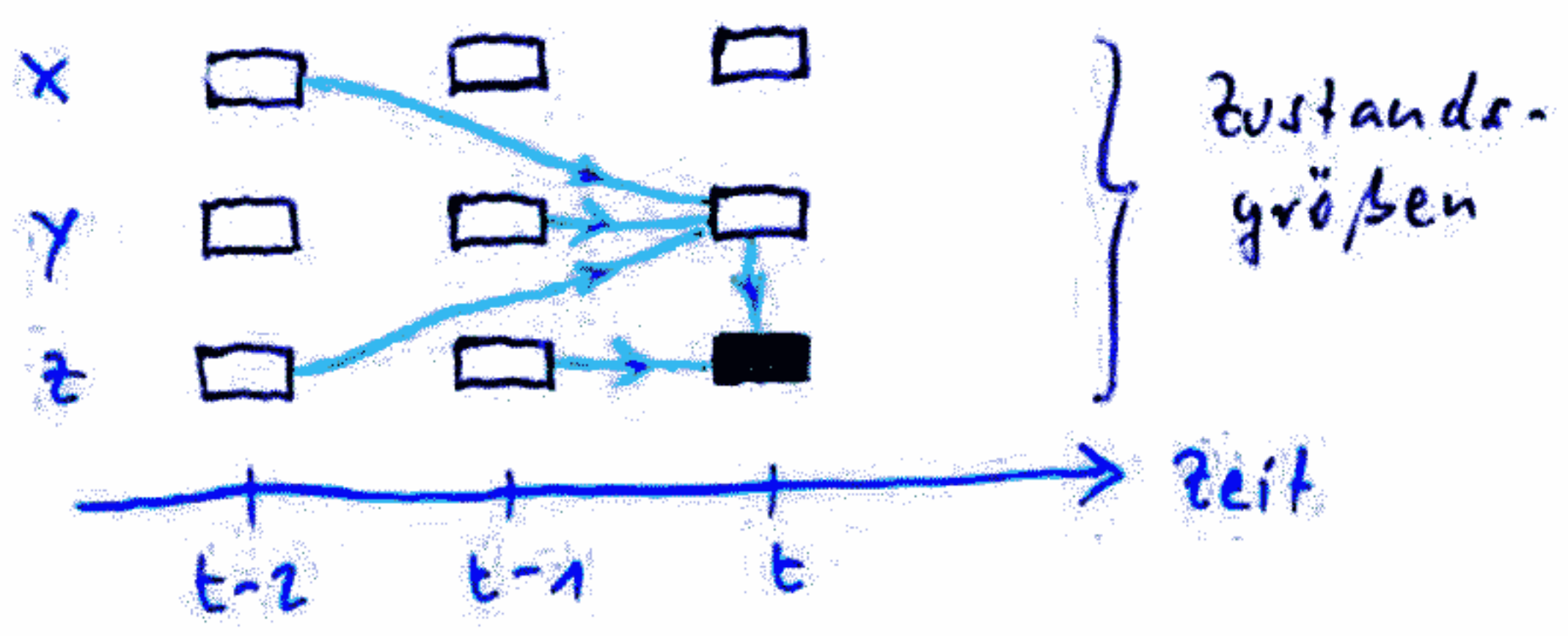
M. Sommer: System Dynamics und Makro-ökonomie, Vlg. Haupt, Bern, 1981

Kybernetik, Feedback mit Verzögerung
 Rückkopplung (pos., neg.)

kausale, deterministische Beziehungen zwischen Variablen

zeitdiskrete äquidistante Behandlung

[MZA-Modelle: Unternehmensentscheidungen nicht kontinuierlich sondern periodisch]

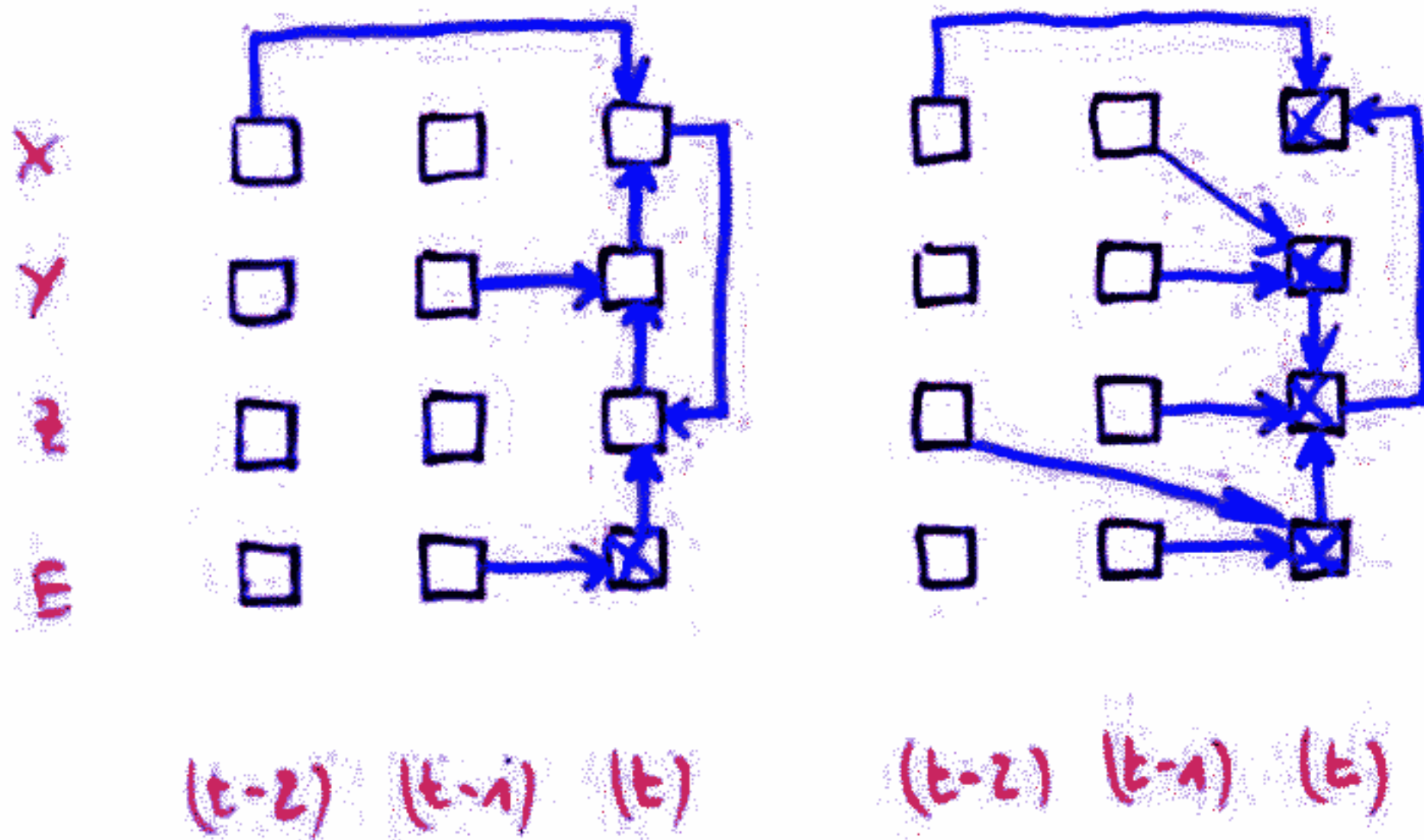


(Pfeildiagramm nach Tinbergen)

Zwicker: metrisch dynam. zeitäquidist.

Modell
interdependent

Modell
rekursiv



Pfeil-
diagramm

Arten von Gleichungen

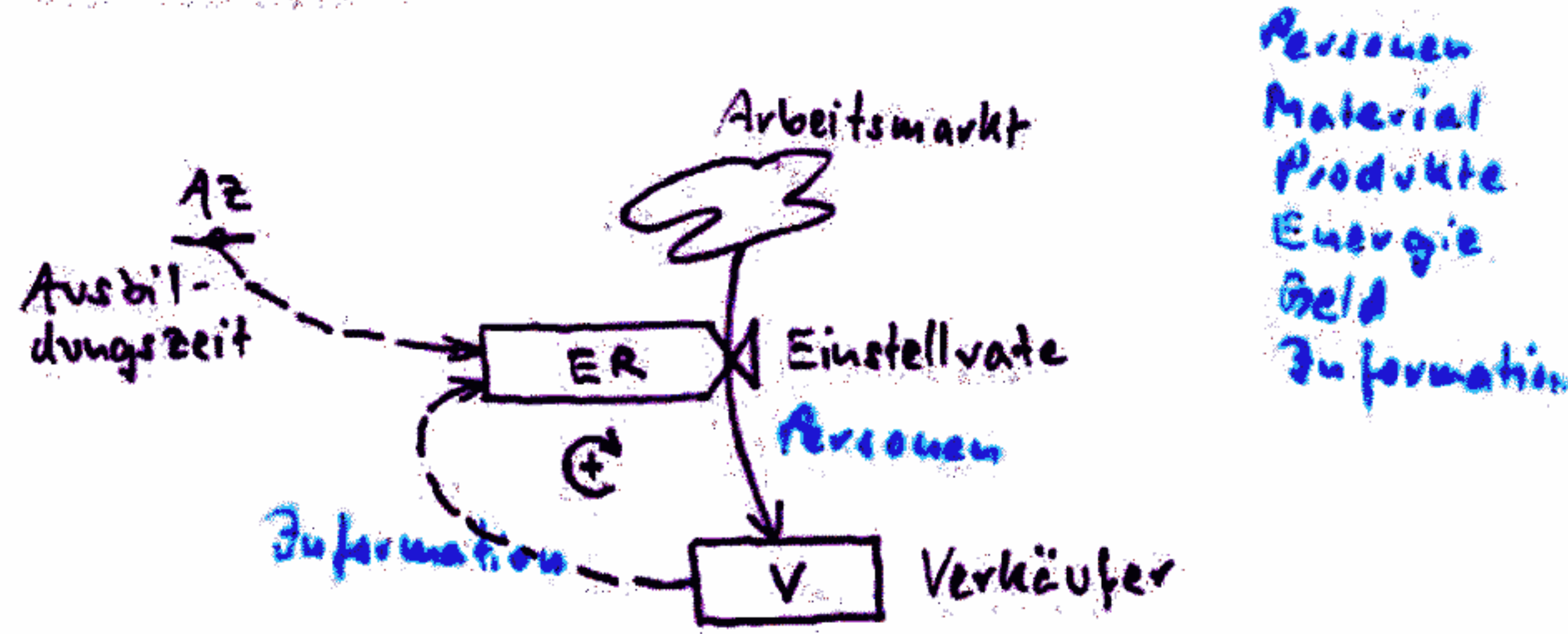
- Kausalbeziehungen
- Verhaltensgleichungen
- Definitionsgleichungen
- Hilfspgleichungen

Arten von konstanten Größen

- Konstanten (unveränderlich)
- Parameter (veränderbar)

Bsp. positiver Regelkreis

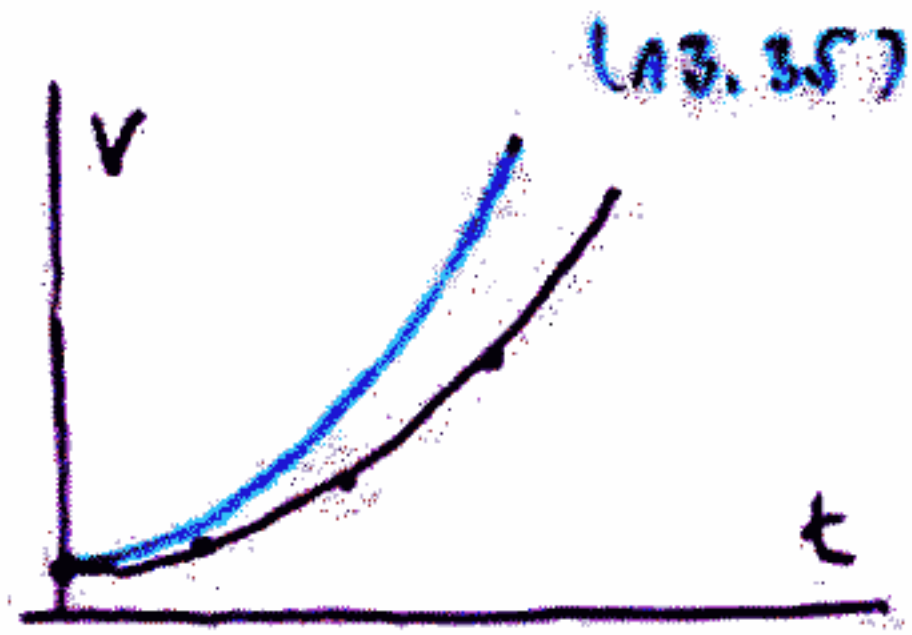
Firma will Verkaufsanstrengungen verstärken; neue Verkäufer müssen von den erfahrenen V. ausgebildet werden:



Level, Zustand, Status	V	[Personen]
rate, Veränder., Fluß	ER	[Personen/Woche]
Konstanten	AZ	[Wochen] (50)

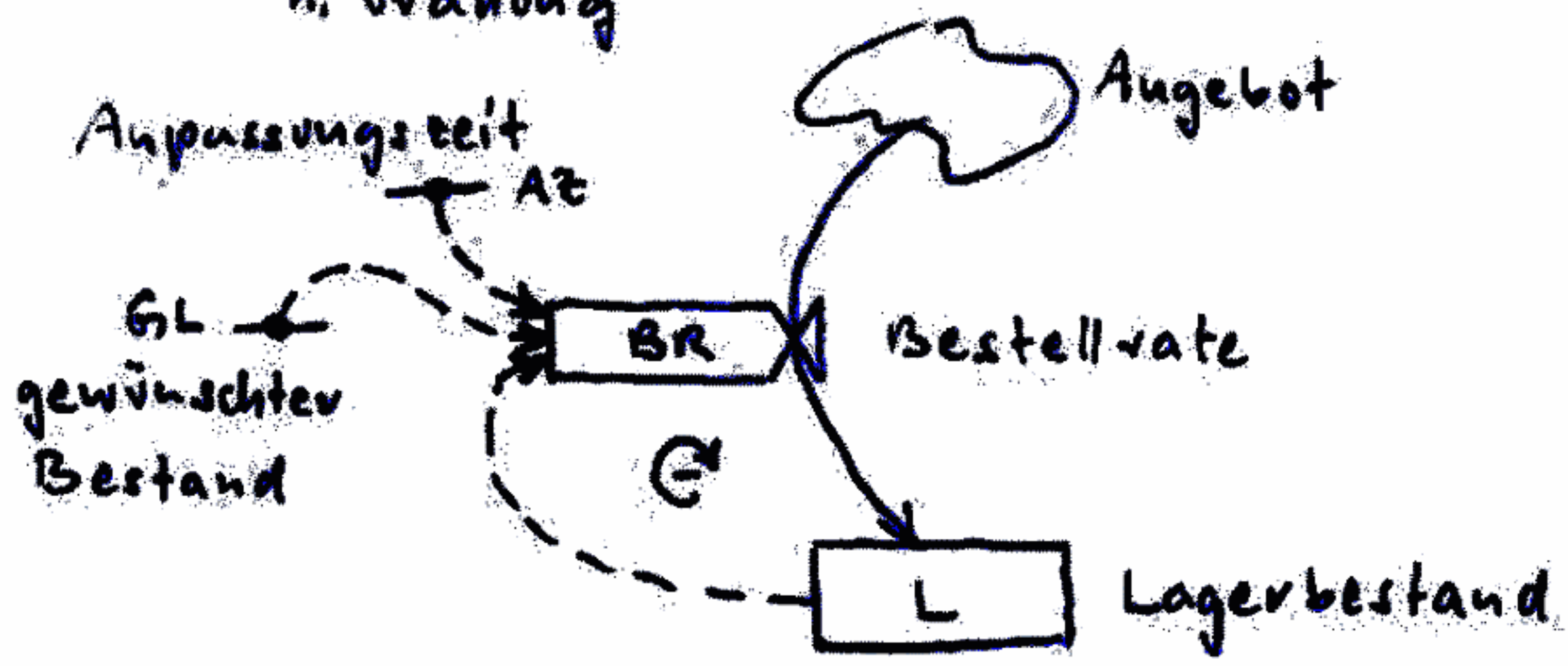
$$ER = \frac{1}{AZ} \cdot V \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \text{z.B. } (\Delta t = 20)$$

Zeit t [Wochen]	Verk. V [Personen]	Einstellr. ER [Pers./W.]	Veränd. Verk. ΔV [Personen/20W.]
0	6	0.12	2.4
20	8.4	0.168	3.36
40	11.76	0.235	4.70 usw.



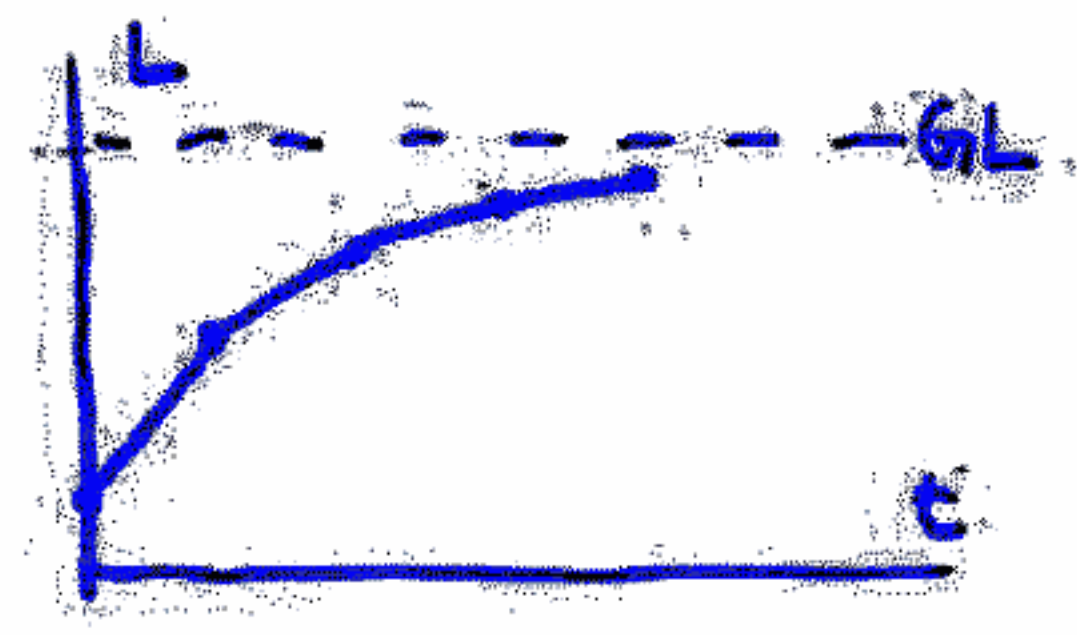
geometrisches Wachstum
 $\Delta t \rightarrow 0 \rightarrow$ exponentielles W.

Bsp. negativer Regelkreis : Lagerhaltung
1. Ordnung

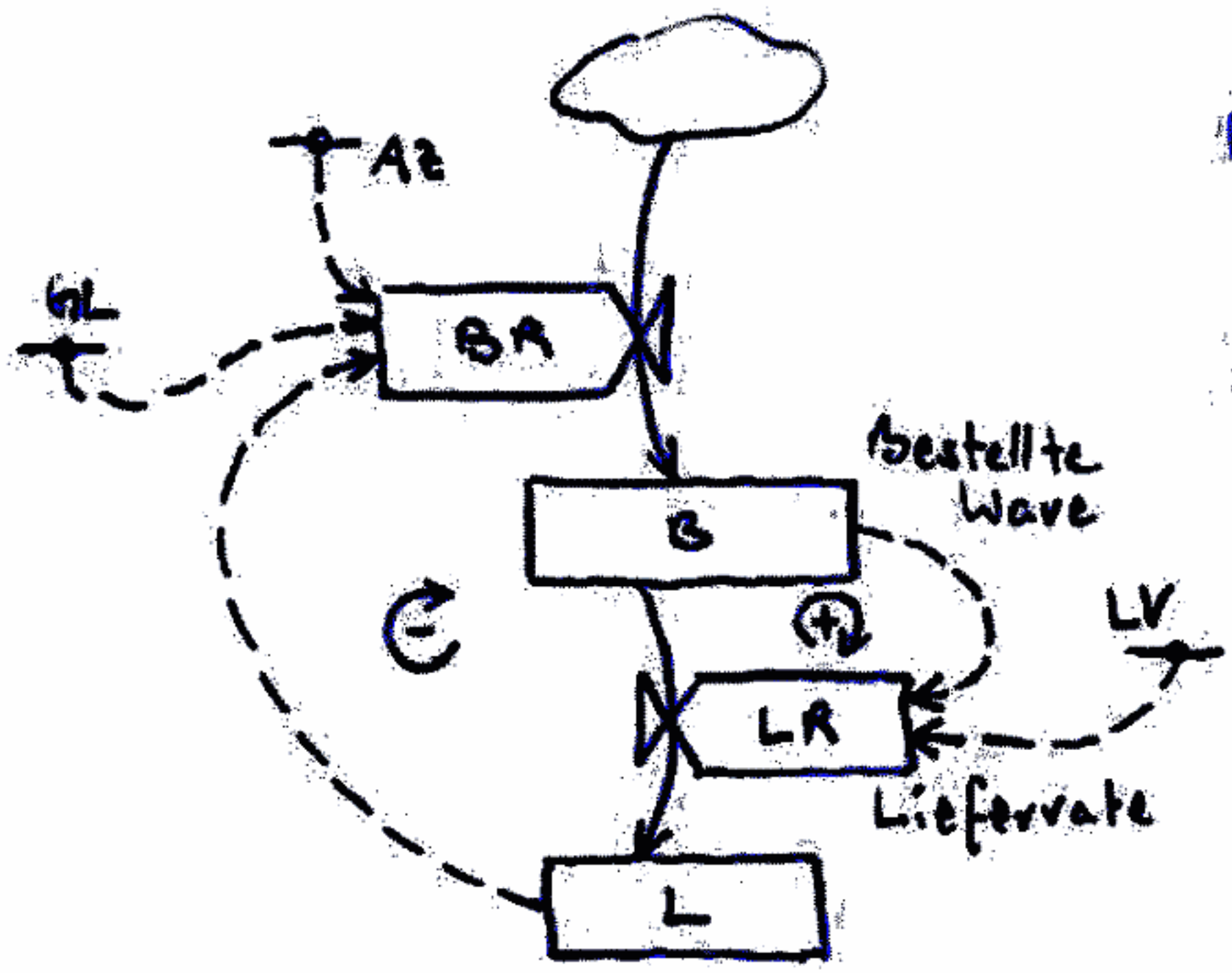


$$BR = \frac{1}{A_z} (GL - L)$$

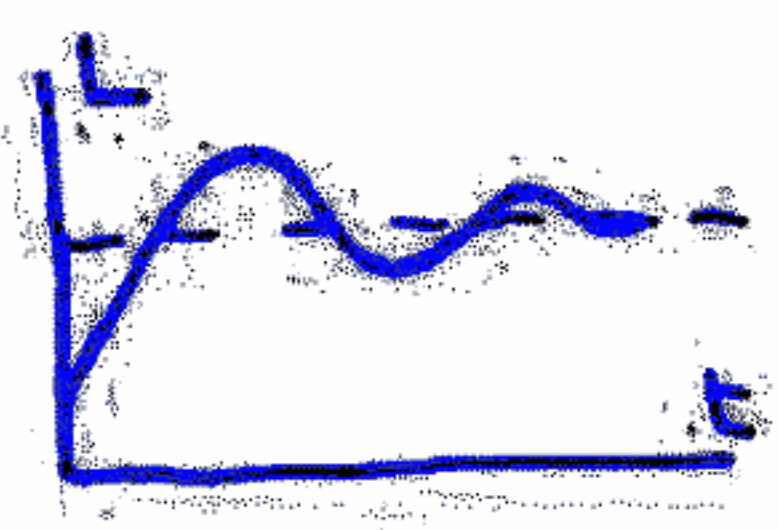
vorgegeb. Ziel



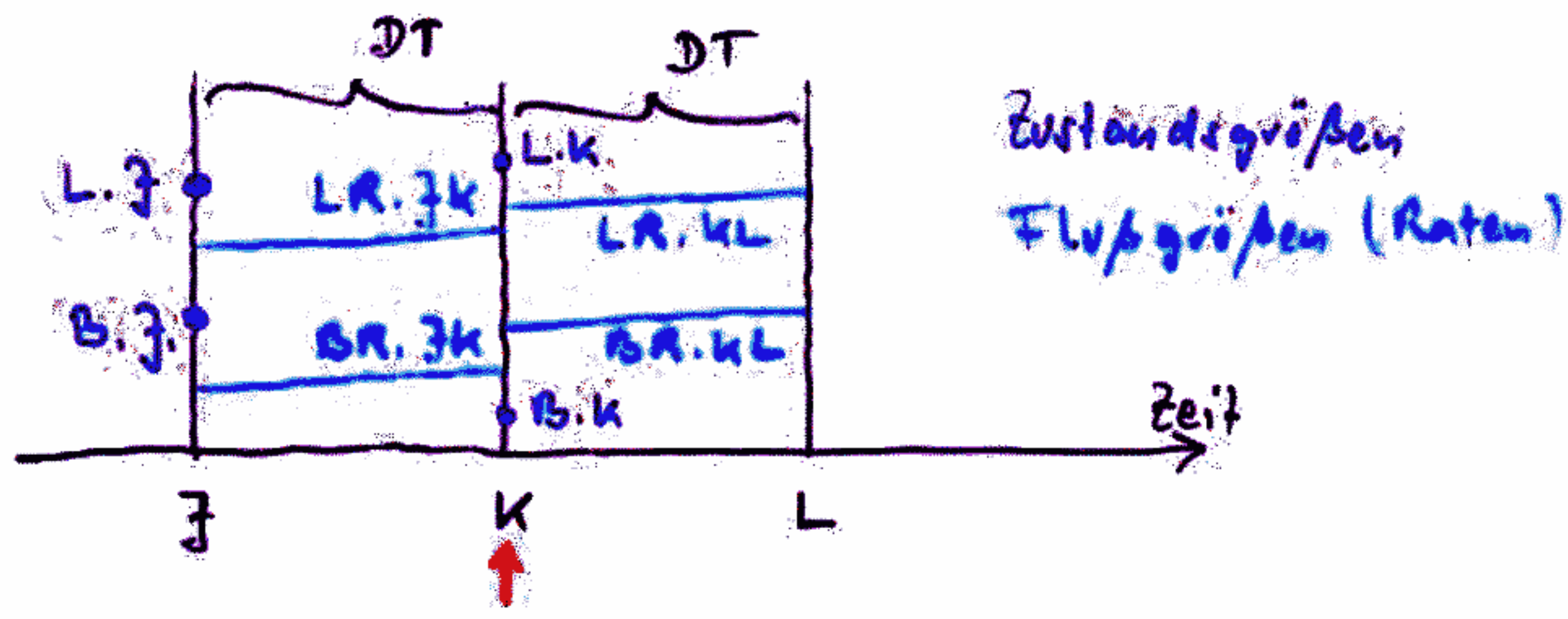
Bsp. Regelkreis 2. Ordnung
(wie oben, jedoch Lieferverzögerung LV)



$$LR = \frac{B}{LV}$$



Rechenfolge bei SD



- R** Bestellrate $BR.KL = \frac{1}{AZ} (GL - L.K)$
- L** Bestellte Ware $B.K = B.J + DT \cdot \underbrace{(BR.JK - LR.JK)}_{BD.K}$
- R** Lieferrate $LR.KL = \frac{1}{LV} \cdot B.K$
- L** Lagerbestand $L.K = L.J + DT \cdot LR.JK$
- C** Konstanten $AZ =$
 $LV =$
 $GL =$
 $DT =$
- N** Anfangswerte $L =$
 $B =$
- A** Hilfsvariable $BD.K = BR.JK - LR.JK$

DYNAMO - Compiler von R. Pugh z.B. Version 11 F
 sortiert Gleichungen, übersetzt nach FORTRAN,
 besorgt Zeitschleife, kontrolliert Vollständigkeit,
 besorgt Ausgabe (Tabellen, Printplots)

```

0.1      *      NEGATIVER REGELKREIS ERSTER ORDNUNG
0.2      RUN
0.3      NOTE
0.4      NOTE      DIE FOLGENDEN FUENF LINIEN GEBEN DIE
0.5      NOTE      GLEICHUNGEN DES MODELLS AN
1        R  BR.KL=(1/AZ)(GL-L.K)
1.1      C  AZ=5
1.2      C  GL=5000
2        L  L.K=L.J+(DT)(BR.JK)
2.1      N  L=1000
2.4      NOTE      DIE FOLGENDEN ZUSATZGLEICHUNGEN DIENEN NUR IN-
2.5      NOTE      FORMATIONSZWECKEN, SIE SIND NICHT TEIL DES MODELLS,
2.6      NOTE      SIE GEBEN UEBER DEN LAGERBESTAND AUSKUNFT.
3        S  LFB.K=GL-L.K
4        S  LFBZ.K=(DT)(BR.JK)
4.3      NOTE      DIE DRUCKANWEISUNGEN GEBEN DIE SPALTENNUMMER, DEN
4.4      NOTE      NAMEN DER VARIABLEN UND DIE SKALIERUNG AN.
4.5      NOTE      IN DER SKALA (0.0) GIBT DIE ERSTE ZAHL DEN EXPONENTEN
4.6      NOTE      AN MIT DEM DER WERT MULTIPLIZIERT WIRD (ZEHN MIT EINEM
4.7      NOTE      EXPONENTEN VON NULL IST GLEICH EINS).
4.8      NOTE      DIE ZWEITE ZAHL GIBT DIE ANZAHL DER KOMMASTELLEN AN.
5        PRINT  1)LFBZ(0.0)/2)L(0.0)/3)LFB(0.0)/4)BR(0.0)
6        NOTE      DIE DRUCKANWEISUNG GIBT DIE AUSZUDRUCKENDE VARIABLE,
6.1      NOTE      DAS SYMBOL DER VARIABLEN FUER DEN DRUCK UND DIE SKA-
6.2      NOTE      LIERUNG AN. IST KEINE SKALIERUNG ANGEGBEN, SO WAHLT
6.3      NOTE      DYNAMO SELBST EINE ENTSPRECHENDE AUS.
7        NOTE      PLOT L=L(0,5000)/BR=B(0,1000)
7.1      NOTE      KONTROLLANWEISUNGEN. DT IST DAS LOESUNGSINTERVALL.
7.2      NOTE      LENGTH IST IN ZEITEINHEITEN GEMESSEN UND GIBT DIE
7.3      NOTE      LAENGE DES SIMULATIONSLAUFES AN.
7.4      NOTE      PRTPER UND PLTPER GEBEN DIE INTERVALLE ZWISCHEN DEN
7.5      NOTE      AUSZUDRUCKENDEN UND AUFZUZEICHNENDEN WERTEN AN.
8        C  DT=2
8.1      C  LENGTH=24
8.2      C  PRTPER=2
8.3      C  PLTPER=2
9        NOTE      WIEDERHOLUNGSLAEUFE MIT VERAENDERTEN KONSTANTEN
9.1      RUN    1
9.2      C  AZ=10
9.3      C  LENGTH=12
10       RUN    2
10.1     C  AZ=20

```

Tabelle 8: DYNAMO-Modell

GA=0, LR=L, VE=E, ELV=J, WLV=W, ER=R, AB=B, V=V, PV=P

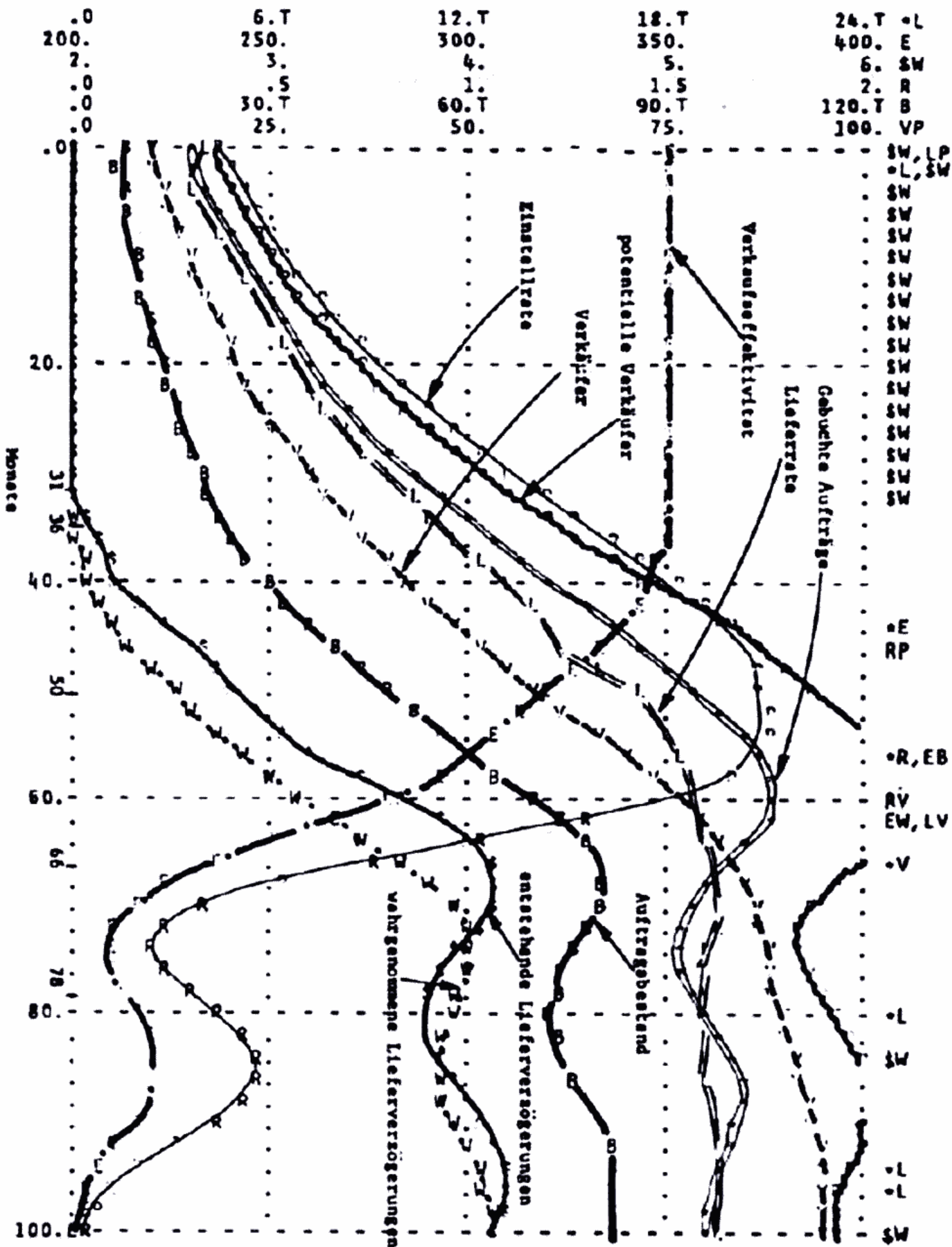


Fig. 2. 5d: Durch Kapazität begrenztes Umsatzwachstum

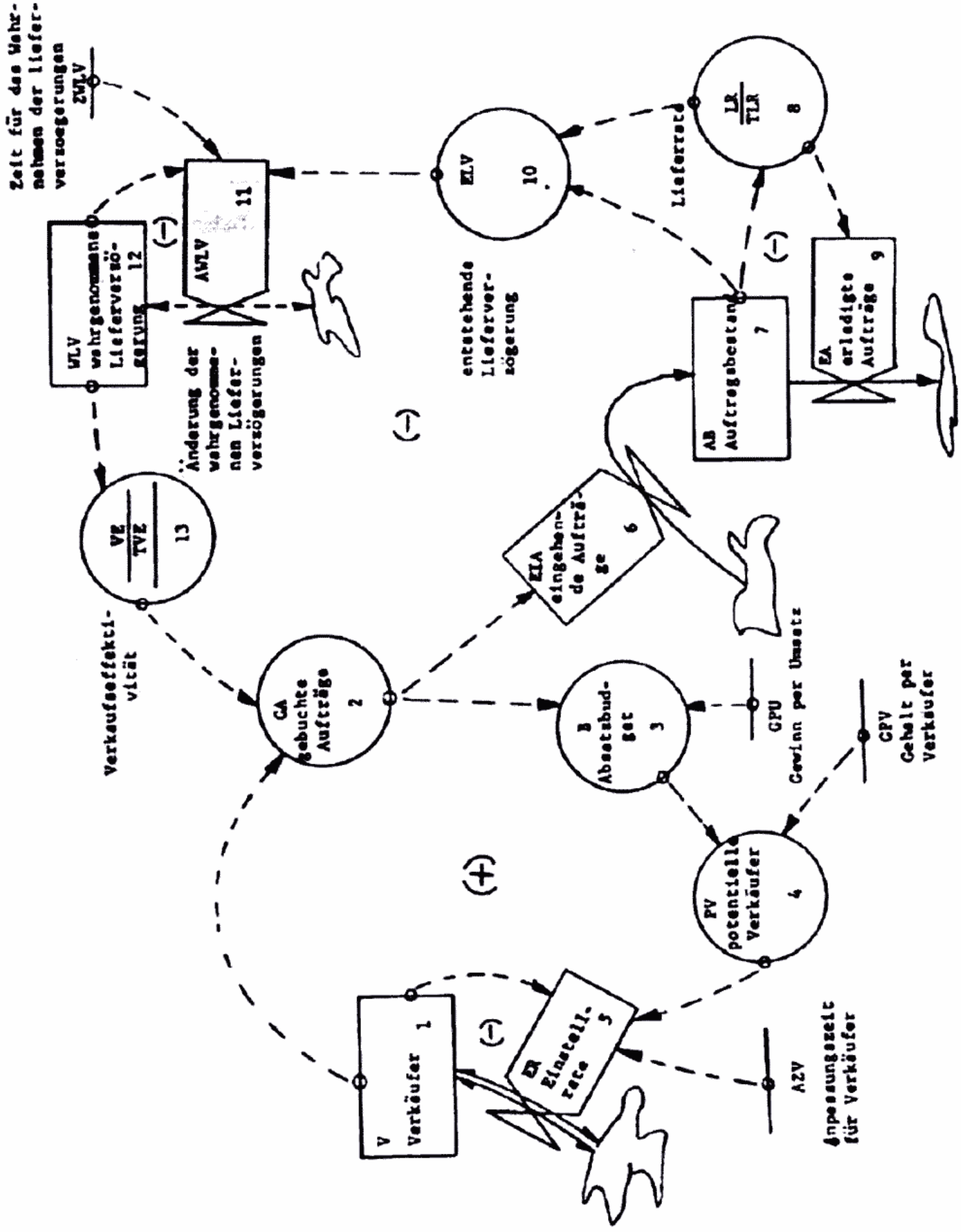


Fig. 2. 5a: Umsatz, Wachstum und Sättigung

MA - Modell von Samuelson (Multiplikator - Akzelerator)

C Konsum

Y Volkseinkommen

I Investitionen = $I_i + I_a$

I_i Invest., durch Konsum induziert

I_a " , durch Unternehmer autonom festgelegt

$$C_t = \alpha Y_{t-1}$$

$$I_{i,t} = \beta [C_t - C_{t-1}]$$

$$Y_t = C_t + I_{i,t} + \underbrace{I_{a,t}}_{\text{exogen}}$$

} Hypothese
Modell
Funktion
Gleichung

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta [\alpha Y_{t-1} - C_{t-1}] + I_{a,t}$$

- reduzierte Gleichung

$$Y_t = (\alpha + \alpha\beta) Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + I_{a,t}$$

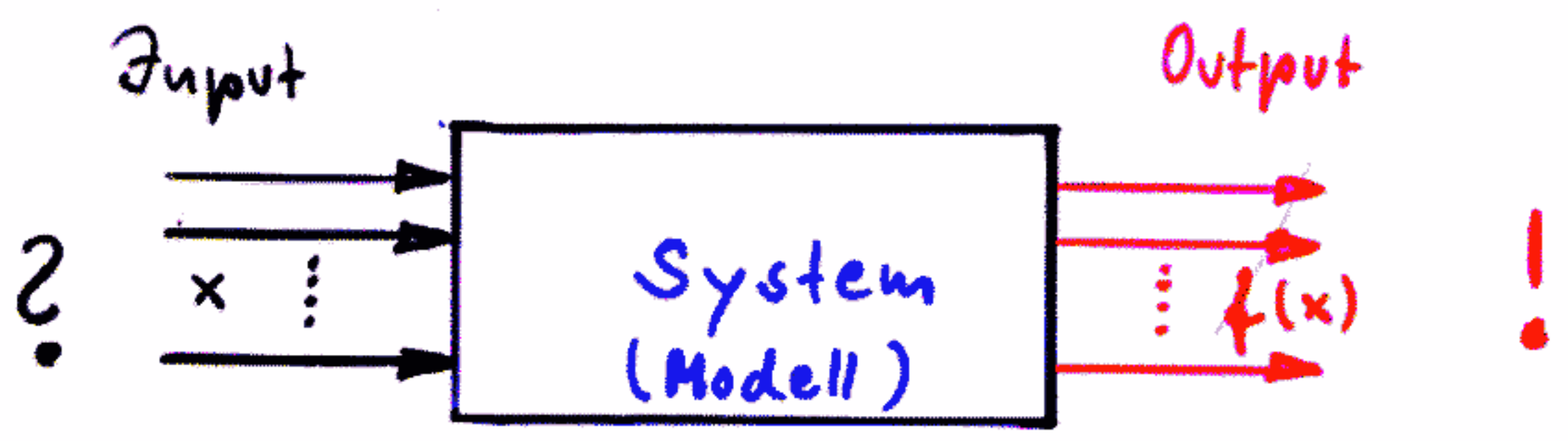
Endgleichung : Autoregression 2. Ordnung

simultane Schätzung der Parameter bei
größeren / nichtlinearen Gleichungssystemen
schwierig

↗ Gleichungen, Parameter a priori
Simulation

System Dynamics ~ 1965

5. Optimierung



Simulationsfrage: Was geschieht, wenn ... ?

Optimierungsfrage: Was ist zu tun, um ... zu erreichen (erzielen)?

in der Regel nur iterativ zu beantworten
Ihr Text

System: Original

↳ experimentelle Optimierung

„Planung u. Auswertung von Versuchen“

Modell

- mathematisches Modell

↳ mathematische Optimierung

analytisch

↳ Opt. bedingungen

numerisch

- Computer - Modell

↳ mathematische Programmierung

lineare

quadratische

nichtlineare

binäre

ganzzahlige

⋮

Input

- nicht beeinflussbare Größen
- Entscheidungsvariablen / Steuergrößen
funktionen

notwendig zum Optimieren:

Variabilität, Handlungsspielraum

mind. 2 Möglichkeiten

1 Alternative

(Freiheitsgrade oft nicht ausgeschöpft)

Output

- Zielgröße(n)
- Nebenwirkungen, -produkte

notwendig zum Optimieren:

Entscheidungskriterien

mindestens:
besser/schlechter

gegebenenfalls:

Nebenbedingungen, Restriktionen

(Ziele oft nicht genug durchdacht;
[ferne] Nebenwirkungen oft unberücksichtigt)

in wessen Interesse?

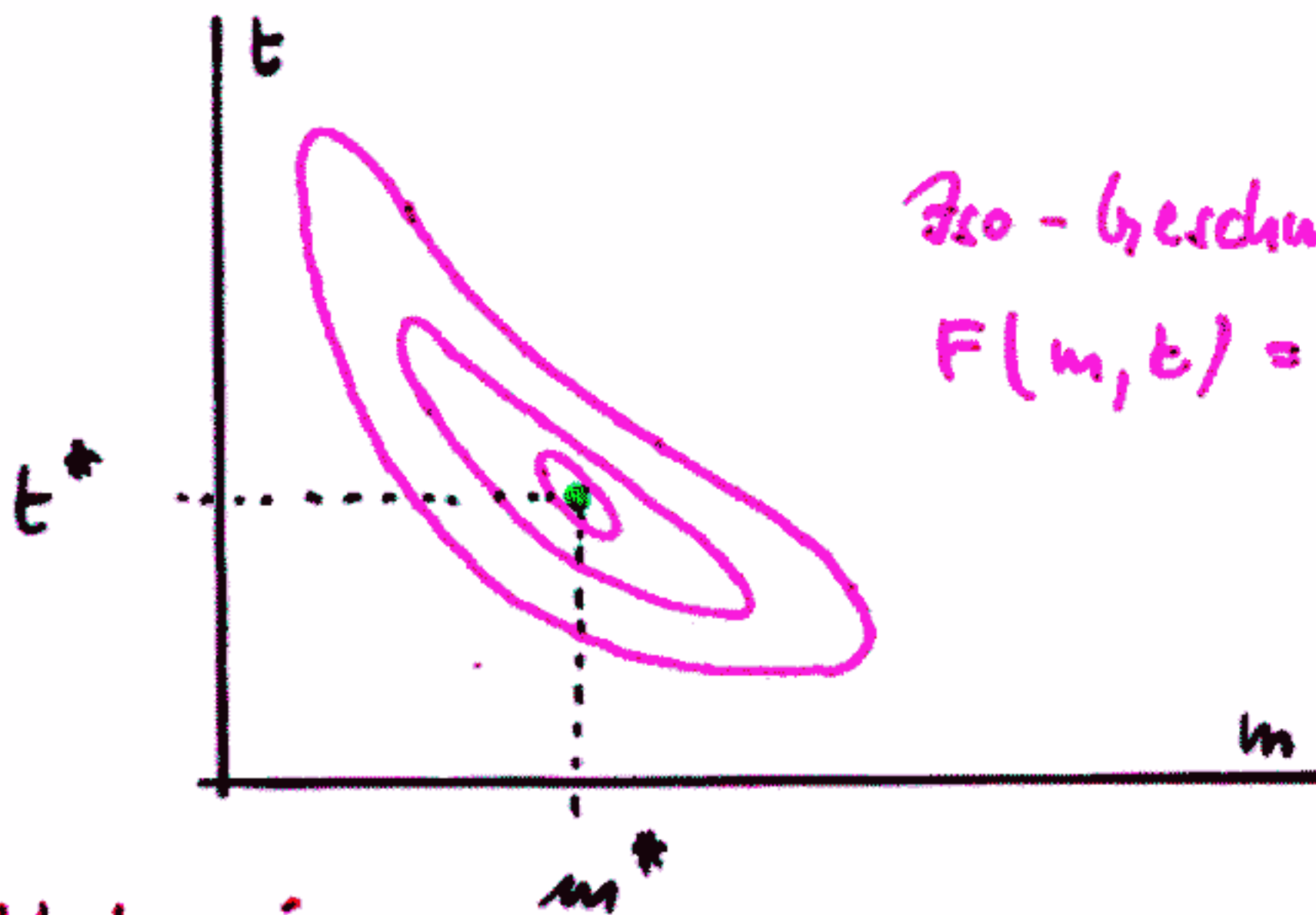
z.B. Technik : Wirkungsgrad ↗

Wirtschaft : Kosten ↓, Gewinn ↗

Umwelt : Emissionen ↓

Beispiel : Teezubereitung

Variablen	Menge der Teeblätter	m [g / Tasse]
	Zeit des Ziehens	t [sec]
Kriterium	Geschmack	$F(m, t)$



Iso-Geschmackslinien
 $F(m, t) = \text{const.}$

Schluckzessive

experimentelle Lösung möglich und üblich
 weil Zusammenhang $F(m, t)$ nicht formal bekannt

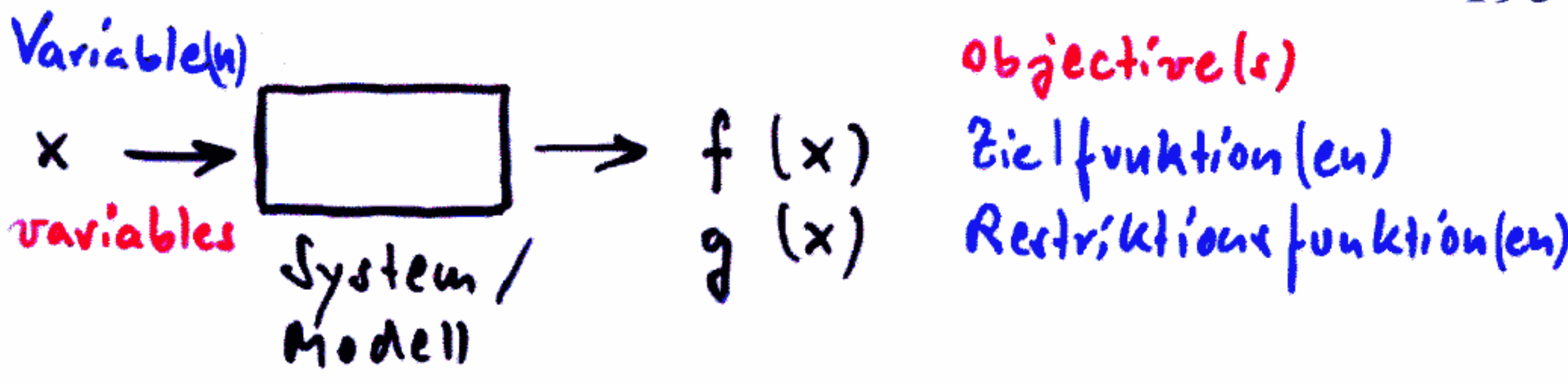
vernachlässigt

Zugabe von Zucker
 Teesorte

$F(m, t, \dots)$ abh. von Situation
 Zeit

evtl. mehrere Teetrinker

↗ Kompromiß zw. verschiedenen
 $F_n(m, t, \dots)$ gesucht



Optimierung: gesucht wird f^* und x^*
 ggf. mit Nebenbed. für g^* (und x^*)
 constraints
 bounds

$x \in M \subseteq \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{B}^n \\ \mathbb{N}^n \\ \mathbb{R}^n \\ \mathbb{U}^n(\pm) \end{array} \right.$ binäre
 ganzzahlige
 - (diskrete) } Parameter-
 Optimierung.
 zuläss. Gebiet
 feasible region Funktionen-

$f^* := \max_{(x)} \{f(x) : x \in M\}$ oder $\min_{(x)} \{f(x) : x \in M\}$

$\max f(x) = -\min(-f(x))$ Minimum
Minimum

$x^* := \operatorname{argmin} \{f(x) : x \in M\}$ Minimalstelle(n)
Minimierer

$M = \mathbb{R}^n$ oder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0 \forall j=1,2,\dots,m\}$ Minimalstelle
 $M \neq \emptyset$
Constrained

$g_j(x) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ = 0 \end{cases}$ $\equiv -g_j(x) \geq 0$ Ungleichungen
inequality constr.

$j=1(1)m$ z.B. $x = g(x, u)$ equality constr.
gleichungen

$a \leq x \leq b$ Schranken
 z.B. $x \geq 0$ Nichtnegativitätsbed.

n Dimension des Problems Aufwand $\mathcal{O}(n^c)$?

globales Optimum / lokale Optima

Variablenvektor x
 Zielfunktion $f(x)$
 Restriktionsfunktionen $g_j(x)$ } alle reell

$f: M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wobei $M \neq \emptyset$

Zulässiger Bereich $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n\}$

gesucht $f^* = f(x^*)$ so daß $x^* \in M$ und

$$\forall x \in M : f(x^*) \leq f(x)$$

f^* globales Minimum ; $x^* = \operatorname{argmin} \{f(x) : x \in M\}$
 Minimalstelle(n)

o.B.d.A. weil $\max(f(x)) = -\min(-f(x))$

wg. begrenzter Rechengenauigkeit genügt

Umgebung $U_\varepsilon(x^*) := \{x \in M : \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$
 oder

Niveaumenge $L_{f^*+\eta} := \{x \in M : f(x) \leq f(x^*) + \eta\}$

lokales Minimum f^+, x^+

$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in M : \|x - x^+\| < \varepsilon \Rightarrow f(x^+) \leq f(x)$

also ist globales M. auch ein lokales M.

(Umkehrung gilt nicht allgemein)

wenn nur ein lok. M. = glob. M. : $f(x)$ unimodal

sonst : multimodal

Einteilung von Optimierungsaufgaben / -methoden

$F(x) \rightarrow F^*$

Einteilung nach F (Zielfunktion)

F^* bekannt

→ Gleichung lösen
Gleichungssystem
z.B. Approximation

F^* unbekannt

→ Extremwertsuche
(Minimum, Maximum)

$F(x)$ unbekannt

→ experimentelle Opt.
(Messung von F)
bzw. Planen + Auswerten
von Versuchen zum
Aufbau eines (lokalen)
Modells

$F(x)$ bekannt

analytisch algorithmisch
(Dim. Modell)

↓
Theorie der Maxima u. Minima
→ Gleichung / Gl. System

F^* abh. von Zeit

→ dyn. Opt.
"Optimum - Halten"

(lernender) Automat
Optimierer
Prozessrechner
(mit/ohne Modell)

F^* zeitinvariant

→ statische Optimierung

$F(x)$ linear

LP

Lineare Programmierung

$F(x)$ nicht linear

NLP

(deckt nur Teilbereiche ab)

$F(x)$ deterministisch
z.B. beim Sim. modell

$F(x)$ stochastisch
z.B. beim Experiment

Einteilung nach x (Variablen)

$x = x(t)$
→ Funktionenoptimierung
($F = \text{Funktional}$)

Variationsrechnung
→ Dgl. lösen

Spezialfall: Kontrolltheorie

→ ggf.:

Diskretisierung
 Parametrisierung →
 dynamische Programmierung
 (Stufenoptimierung)
 bei Rückwirkungsfreiheit

x diskret
ganzzahlig
binär

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$
→ Parameteroptimierung

$x \in \mathbb{R}^n$

Einteilung nach

$n = 1$

n (Zahl der Variablen)

$n > 1$

Einteilung nach Nebenbedingungen

mit Neb. (Restriktionen) ohne Neb.

$$G_j(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} 0 \quad \text{für } j=1 \text{ bis } m$$

Neb. in Form von Schranken

$$a_i \leq x_i \leq b_i$$

→ Transformation

Neb. in Form von Gleichungen

(evtl. Elimination)

→ Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Neb. in Form von Ungleichungen

→ Straffunktionsmethoden

⇒ Parameter opt. ohne Neb.

Spezialfall mehrfache Zielsetzung

- ein Entscheidungsträger

z.B. Gewichtung der Teilziele ; Präferenzrelationen

- mehrere Entscheidungsträger

Verhandlungslösungen

(Spieltheorie)