Kap. 4.2 Binäre Suchbäume ff
Kap. 4.3: AVL-Bäume

Professor Dr. Petra Mutzel
Lehrstuhl für Algorithm Engineering, LS11
Fakultät für Informatik, TU Dortmund

12./13. VO DAP2 SS 2009 28.5./2.6.2009

Motivation

„Warum soll ich heute hier bleiben?"
Balancierte Bäume brauchen Sie immer wieder!

„Was gibt es heute Besonderes?"
Schöne Animationen: Rotationen

Überblick

- Kurz-Wiederholung binäre Suchbäume + Pseudocode
- Einführung von AVL-Bäumen
- Implementierung der Operationen
- Schönes Java-Applet

Implementierung von SEARCH(r,s) in binären Suchbäumen

Wiederholung

1. Vergleiche s mit dem Schlüssel r.key an der Wurzel r (des Teilbaums)
2. Falls gefunden: STOP!
3. Sonst: Falls s < r.key: suche im linken Teilbaum
4. Sonst: suche im rechten Teilbaum
5. Gehe zu 1.
6. Ausgabe: nicht gefunden!

Pseudocode von SEARCH

Eingabe: Baum mit Wurzel p; Schlüssel s
Ausgabe: Knoten mit Schlüssel s oder nil, falls s nicht da

```
Function SEARCH(p,s):TreeNode
(1) while p≠nil ∧ p.key≠s do {
(2)     if s < p.key then
(3)         p:=p.left
(4)     else p:=p.right
(5) }
(6) return p
```


Implementierung von INSERT(r,q) in binären Suchbäumen

- Einfügen eines Knotens q mit Schlüssel s und Wert v in den Baum mit Wurzel r, falls noch nicht vorhanden; sonst Wert überschreiben mit v

1. Suche nach s
2. **Falls** die Suche erfolgreich endet, dann gilt p.key==s; **Dann**: p.info:=v
3. **Sonst:** endet mit der Position eines leeren Unterbaums: Einfügen von q an diese Position

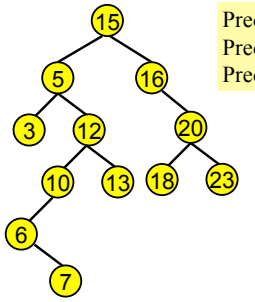
Pseudocode von INSERT

Eingabe: Baum mit Wurzel root; Schlüssel s und Wert v
Prozedur INSERT(root,s,v):TreeNode
(1) **var** TreeNode r,p
(2) r:=nil; p:=root
(3) **while** p≠nil **do {**
(4) r:=p // r ist der zuletzt besucht Knoten
(5) **if** s < p.key **then**
(6) p:=p.left
(7) **else if** s > p.key **then** p:=p.right
(8) **else {** // s==p.key
(9) p.info := v
(10) **return**
(11) **} }** //end while

Pseudocode von INSERT ff

// Suche endet an leerem Unterbaum
// r ist letzter nicht-leerer Knoten
(12) q := **new** TreeNode
(13) q.parent := r
(14) q.key := s
(15) q.info := v
(16) **if** r == nil **then**
(17) root := q // neuen Knoten in leeren Baum einfügen
(18) **else if** q.key < r.key **then** r.left := q
(19) **else** r.right := q

Predecessor-Suche



Predecessor(15) = 13
Predecessor(13) = 12
Predecessor(6) = 5

Implementierung von PREDECESSOR(r,p)

1. Falls p linkes Kind hat: Return Maximum(p.left)
2. Sonst: Falls p rechtes Kind ist: Return(p.parent)
3. Sonst: wandere solange nach oben bis der aktuelle Knoten zum ersten Mal **rechtes Kind ist;** dann: Return(p.parent)
4. oder die Wurzel erreicht ist; dann: existiert kein Vorgänger (größter Knoten mit key≤p.key).

Pseudocode von PREDECESSOR

Eingabe: Knoten p≠nil
Ausgabe: Vorgänger von Knoten p in Inorder-Traversierung
Function PREDECESSOR(p):TreeNode
(1) **var** TreeNode q // q ist parent von p
(2) **if** p.left ≠ nil **then**
(3) **return** MAXIMUM(p.left)
(4) **else {**
(5) q:=p.parent
(6) **while** q≠nil and p==q.left **do {**
(7) p := q
(8) q := q.parent
(9) }
(10) **return** q }

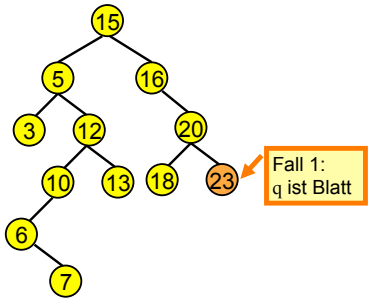
Implementierung von MAXIMUM

1. Wir durchlaufen von Wurzel aus rekursiv den rechten Unterbaum, bis wir auf ein leeres Kind treffen.
2. Der letzte durchlaufene Knoten enthält dann den größten Schlüssel.

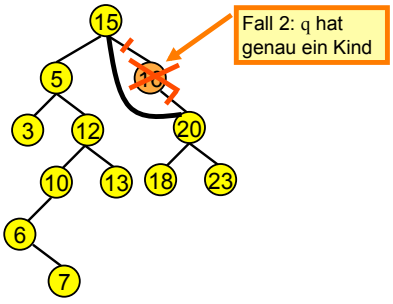
Pseudocode:

Eingabe: nichtleerer Baum mit Wurzel p≠nil
Ausgabe: Knoten im Baum mit kleinstem Schlüssel
Function MINIMUM(p):TreeNode
(1) **while** p.right ≠ nil **do** p:=p.right
(2) **return** p

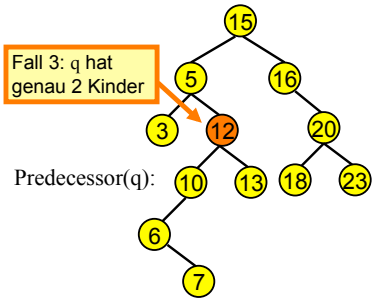
Beispiel für DELETE(r,q)



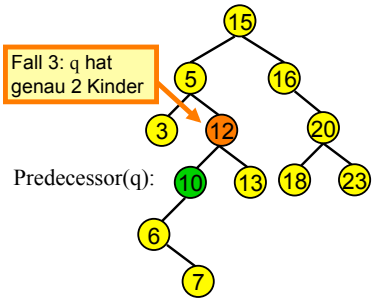
Beispiel für DELETE(r,q)



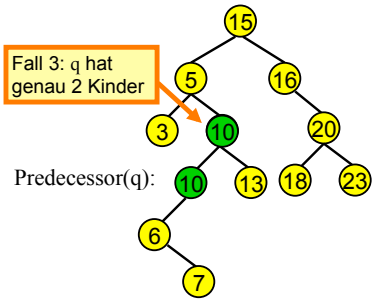
Beispiel für DELETE(r,q)



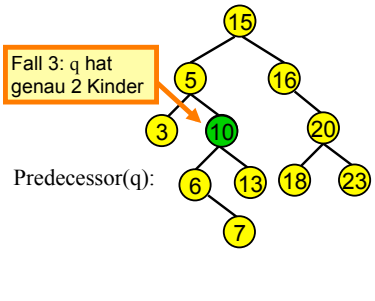
Beispiel für DELETE(r,q)



Beispiel für DELETE(r,q)



Beispiel für DELETE(r,q)



Implementierung von DELETE(r,q) in binären Suchbäumen

- Entfernt Knoten q im Baum mit Wurzel r

1. Suche nach q.key → Suche endet an Knoten v
2. Falls v≠nil, dann
3. Falls v **keine Kinder** besitzt, dann: streiche v
4. Falls v **genau ein Kind** hat: ändere 2 Zeiger („herausschneiden“)
5. Falls v **zwei Kinder** hat, dann hat y:=Predecessor(v) kein rechtes Kind (warum??): Herausschneiden bzw. Entfernen von y und Ersetzen von q durch y.

Pseudocode von DELETE

```
Eingabe: Baum mit Wurzel root; Schlüssel s (existiert!)
Entfernt Knoten mit Schlüssel s aus Baum
Prozedur DELETE(root,s)
(1)  var TreeNode r,p,q          // r wird herausgeschnitten
(2)  q := SEARCH(root,s)
(3)  if q.left == nil or q.right==nil then
(4)     r := q
(5)  else {
(6)     r:=PREDECESSOR(q)        // Vorgänger existiert
(7)     q.key := r.key; q.info := r.info //Umhängen der Daten von r nach q
(8)  }
```


Pseudocode von DELETE ff

```
// jetzt löschen wir Knoten r mit maximal einem Kind
// lasse p auf Kind von r zeigen (falls Kind ex.)
(9)  if r.left ≠ nil then p := r.left else p:=r.right
(10) if p ≠ nil then p.parent := r.parent //neuer Elter von p wird Elter von r
(11) if r.parent == nil then root := p // neuer Elter von p wird Elter von r
(12) else if r == r.parent.left then
(13)          r.parent.left := p          // p wird linker Nachfolger
(14)     else r.parent.right := p  // p wird rechter Nachfolger
```


Analyse der Operationen

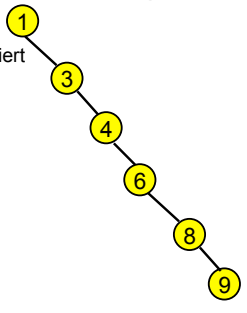
1. Alle Operationen benötigen eine Laufzeit von O(h(T)) für binäre Suchbäume, wobei h(T) die Höhe des gegebenen Suchbaumes T ist.

Frage: Wie hoch kann h(T) für einen binären Suchbaum mit n Knoten sein?

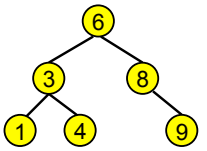
Abhängigkeit der Höhe von der Einfügereihenfolge

Einfügereihenfolge: 1,3,4,6,8,9

Baum ist zu linearer Liste degeneriert
Problem: Suchzeit ist linear,
da h(T)=n-1



Einfügereihenfolge: 6,8,3,4,1,9



Kap. 4.3: AVL-Bäume

Balancierte Bäume

- AVL-Bäume sind sogenannte balancierte Bäume.
- **Balancierte Bäume** versuchen sich regelmäßig wieder „auszubalancieren“, um zu garantieren, dass die Höhe logarithmisch bleibt.
- Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten:
  - **höhenbalancierte Bäume**
  - **gewichtsbalancierte Bäume**
  - **(a,b)-Bäume**
- Um die bisherigen binären Suchbäume von den balancierten Bäumen abzugrenzen, nennt man erstere auch **natürliche binäre Suchbäume**.

Balancierte Bäume

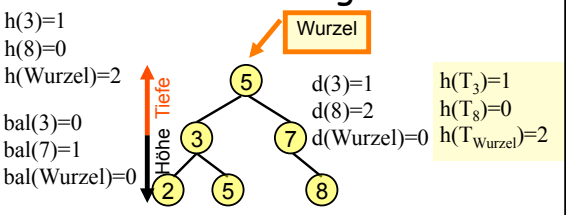
- **Höhenbalancierte Bäume:** Die Höhen der Unterbäume eines Knotens unterscheiden sich um höchstens eine Konstante — AVL-Bäume
- **Gewichtsbalancierte Bäume:** Die Anzahl der Knoten in den Unterbäumen jedes Knotens unterscheidet sich höchstens um eine Konstante.
- **(a,b)-Bäume ($2 \le a \le b$):** Jeder innere Knoten (außer der Wurzel) hat zwischen a und b Kinder und alle Blätter haben den gleichen Abstand zur Wurzel.

B-Bäume: s. Kap. 4.4

Definitionen für AVL-Bäume

- **Höhe eines Knotens:** Länge eines längsten Pfades von v zu einem Nachkommen von v
- **Höhe eines Baumes**: Höhe seiner Wurzel
- **Höhe eines leeren Baumes:** -1
- **Balance eines Knotens:** $bal(v)=h_2-h_1$, wobei h_1 und h_2 die Höhe des linken bzw. rechten Unterbaumes von v bezeichnen
- v **heißt balanciert:** wenn $bal(v) \in \{-1,0,+1\}$, sonst heißt v unbalanciert

Bezeichnungen



Beispiele für balanciert üben!

Höhe $h(v)$: Länge eines längsten Pfades von v zu einem Nachkommen von v

Höhe $h(T_r)$ eines (Teil-)baumes T_r mit Wurzel r: $\max \{ d(v): v \text{ ist Knoten in } T_r \}$ = Höhe seiner Wurzel

AVL-Bäume

- **Definition:** Ein AVL-Baum ist ein binärer Suchbaum, bei dem alle Knoten balanciert sind.
- AVL-Bäume wurden 1962 eingeführt von G.M. Adelson-Velskii und Y.M. Landis
- AVL-Bäume sind höhenbalanciert.
- Man kann zeigen:
- **Theorem:** Ein AVL-Baum mit n Kindern hat Höhe $O(\log n)$.

Implementierungen der Operationen

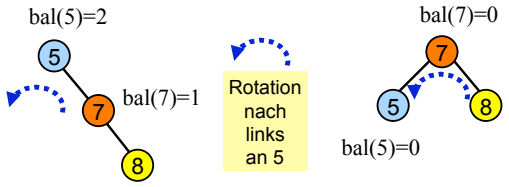
- **Search**
- **Minimum**
- **Maximum**
- **Successor**
- **Predecessor**
- genau wie bei den natürlichen binären Suchbäumen.

Implementierung der Operationen Insert und Delete in **AVL-Bäumen**

- **Idee:**
- zunächst wie bei den natürlichen binären Suchbäumen.
- Falls Baum nicht mehr balanciert ist, dann wissen wir, dass ein Knoten u auf dem Suchpfad existiert mit bal(u) ∈ {-2,+2}
- Wir rebalancieren den Baum nun an dieser Stelle, so dass er danach wieder balanciert ist.

Beispiel 1:

Rotationen (1)

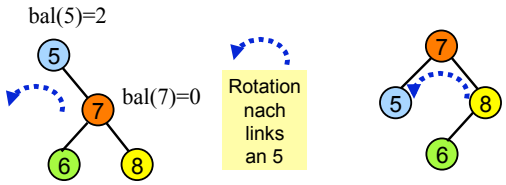


5 ist unbalanciert

5, 7, 8 sind balanciert

Beispiel 2:

Rotationen (2)

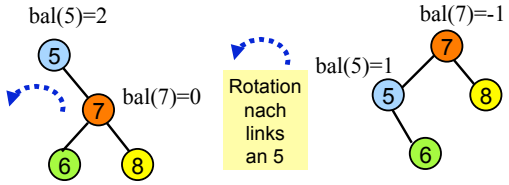


falsch: die 6 muss mitwandern

5 ist unbalanciert

5, 7, 8 sind balanciert

Rotationen (3)



so korrekt! Warum eigentlich?

5 ist unbalanciert

5, 7, 8 sind balanciert

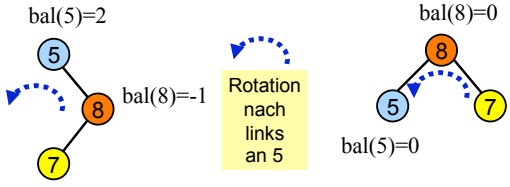
Die Suchbaumeigenschaft bleibt bei einer Rotation erhalten.

Nach einer Rotation entsteht wieder ein binärer Suchbaum

Achtung: dies ist nicht so wenn gleiche Schlüssel enthalten sind

Beispiel 3:

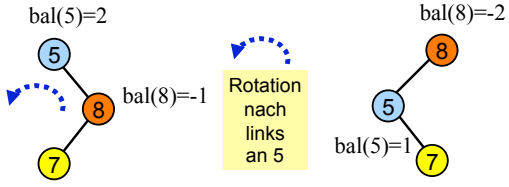
Rotationen (4)



5 ist unbalanciert

falsch: Das war keine Rotation!!!

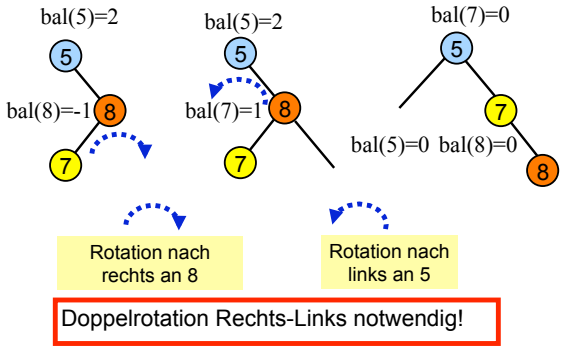
Rotationen (5)



5 ist unbalanciert

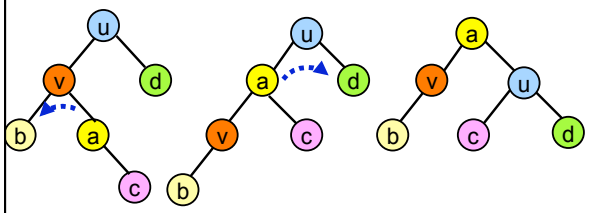
Diese Rotation hat nichts genützt!

Rotationen (6)



Doppelrotation Rechts-Links notwendig!

Doppelrotationen



Definition

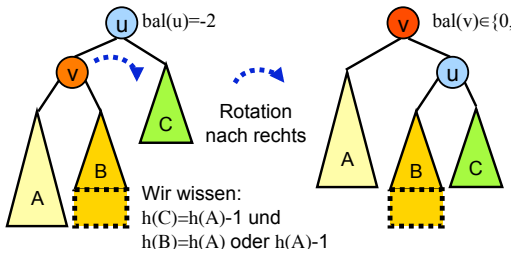
- **AVL-Ersetzung:** Operation (z.B Insert, Delete), die einen Unterbaum T eines Knotens z durch einen modifizierten AVL-Baum ersetzt, dessen Höhe um höchstens 1 von der Höhe von T abweicht.

Rebalancierung

- Wir betrachten einen AVL-Baum unmittelbar nach einer AVL-Ersetzung (Einfügung bzw. Entfernens eines Knotens).
- Sei u ein unbalancierter Knoten **maximaler Tiefe**, d.h. $bal(u) \in \{-2,+2\}$.
- Sei T der maximale Unterbaum mit Wurzel u in T.
- Wir unterscheiden vier verschiedene Situationen.

1. Fall: bal(u)=-2

- Sei v das linke Kind von u (existiert!)
- **Fall 1.1: $bal(v) \in \{-1,0\}$:** Rotation nach rechts an u

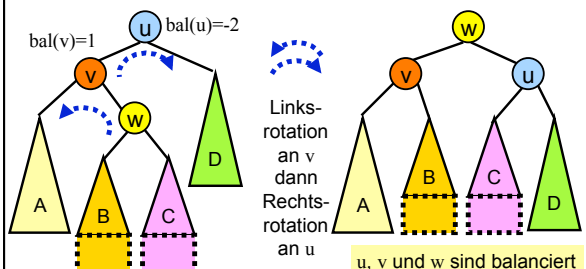


Wir wissen: $h(C)=h(A)-1$ und $h(B)=h(A)$ oder $h(A)-1$

- Suchbaumeigenschaft bleibt erhalten; u und v sind balanciert
- Für die Knoten unterhalb hat sich nichts geändert.

1. Fall: bal(u)=- 2 ff.

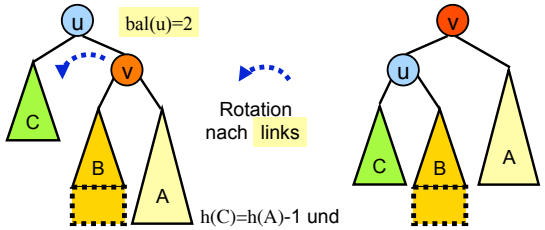
- Sei v das linke Kind von u (existiert!)
- **Fall 1.2: $bal(v)=+1$:** Links-Rechtsrotation an u



$h(D)=h(A)$ und ($h(B)=h(A)$ oder $h(C)=h(A)$)

2. Fall: bal(u)=+2

- Sei v das rechte Kind von u (existiert!)
- **Fall 2.1: bal(v)∈{0,1}**: Rotation nach links an u

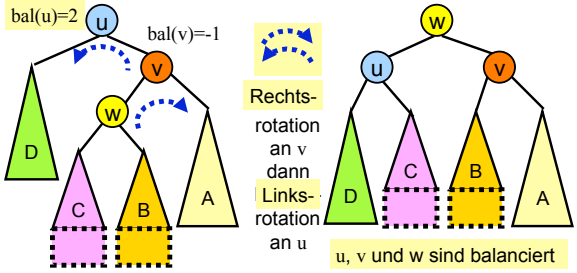


h(C)=h(A)-1 und
h(B)=h(A) oder h(B)=h(A)-1

- Inorder-Reihenfolge bleibt erhalten und u und v sind balanciert
- Für die Knoten unterhalb hat sich nichts geändert.

2. Fall: bal(u)=+2 ff.

- Sei v das rechte Kind von u (existiert!)
- **Fall 2.2: bal(v)=-1** Rechts-Links rotation an u



u, v und w sind balanciert

h(D)=h(A) und (h(B)=h(A) oder h(C)=h(A))

Rebalancierung ff.

- Seien T der maximale Unterbaum mit Wurzel u in T vor der Rebalancierung, T´ der gleiche Teilbaum nach einer einfachen Rotation und T´´ nach einer Doppelrotation.

- Für die einfache Rotation gilt: h(T´)-h(T)∈{-1,0}
- Im Falle der Doppelrotation gilt: h(T´´)-h(T) = -1

- Alle Transformationen (Einfach- und Doppelrotationen) kann man also als eine AVL-Ersetzung auffassen.

Rebalancierung ff.

- Nach der AVL-Ersetzung gilt:
- Die Unterbäume mit Wurzel u und v sind danach balanciert. Für die Unterbäume unterhalb hat sich die Balancierung nicht geändert.

- Bestimme nun den nächsten unbalancierten Knoten maximaler Tiefe. Diese Tiefe ist nun kleiner als vorher.
- Wiederhole die Rebalancierung (AVL-Ersetzung) solange, bis alle Knoten balanciert sind.

- Das Verfahren konvergiert nach O(h(T)) Iterationen zu einem gültigen AVL-Baum.

Rebalancierung ff.

- Die Insert-Operation unterscheidet sich nur insofern von der Delete-Operation, dass hier ein einziger Rebalancierungsschritt genügt.

- Bei der Delete-Operation hingegen kann es sein, dass mehrere Rebalancierungsschritte notwendig sind.

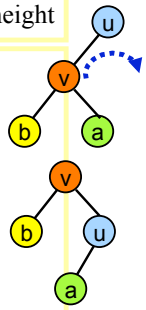
Implementierungen:

vereinfacht: ohne parent

RotateRight(u)

Function h(u):int
If u=nil **then return** -1 **else return** u.height

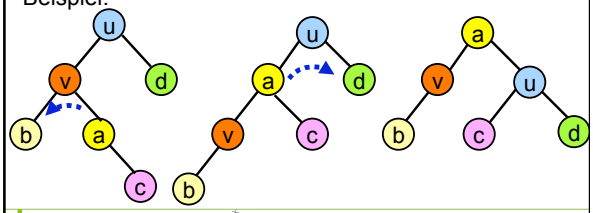
Function RotateRight(u):TreeNode
(1) v:=u.left //Bestimme v
(2) u.left:=v.right
(3) v.right:=u
(4) u.height:=max(h(u.left),h(u.right))+1
(5) v.height:=max(h(v.left),h(u))+1
(6) return v //neue Wurzel



RotateLeftRight(u)

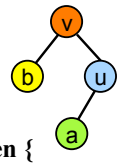
Function RotateLeftRight(u):TreeNode
(1) u.left:=RotateLeft(u.left)
(2) return RotateRight(u)

Beispiel:



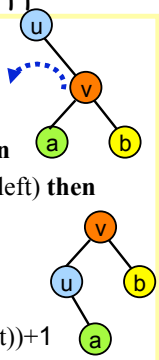
INSERTAVL(p,q)

(1) If p==nil **then** INSERT(p,q)
(2) else
(3) **If** q.key<p.key **then** {
(4) INSERTAVL(p.left,q)
(5) **if** h(p.right)-h(p.left)==-2 **then** {
(6) **if** h(p.left.left)>h(p.left.right) **then**
(7) p=RotateRight(p)
(8) **else** p=RotateLeftRight(p)
(9) } }



INSERTAVL(p,q) ff

(10) Else {
(11) **If** q.key>p.key **then**
(12) INSERTAVL(p.right,q)
(13) **if** h(p.right)-h(p.left)==2 **then**
(14) **if** h(p.right.right>h(p.right.left) **then**
(15) p=RotateLeft(p)
(16) **else** p=RotateRightLeft(p)
(17) } }
(18)p.height:=max(h(p.left),h(p.right))+1



Analyse

- Rotationen und Doppelrotationen können in konstanter Zeit ausgeführt werden.
- Eine Rebalancierung wird höchstens einmal an jedem Knoten auf dem Pfad vom eingefügten oder gelöschten Knoten zur Wurzel durchgeführt.
- Insert und Delete-Operationen sind in einem AVL-Baum in Zeit $O(\log n)$ möglich.
- AVL-Bäume unterstützen die Operationen Suchen, Insert, Delete, Minimum, Maximum, Successor, Predecessor, in Zeit $O(\log n)$.

Diskussion

- Wenn oft gesucht und selten umgeordnet wird, sind AVL-Bäume günstiger als natürliche binäre Suchbäume.
- Falls jedoch fast jeder Zugriff ein Einfügen oder Entfernen ist (hinreichend zufällig), dann sind natürliche binäre Suchbäume vorzuziehen.

Java-Applets

- Es gibt zu AVL-Bäumen sehr schöne Java-Applets, die die Doppelrotationen sehr schön darstellen, z.B. die Studiumsseiten von Math^{e}(Prism)^{a}:
- http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/BinSuch/index.html

ENDE

Zum Ausschneiden und Üben

1 2 3 4

5 6 7 8

9 10 11 12