Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2

Professor Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für Algorithm Engineering, LS11

Fakultät für Informatik, TU Dortmund

2. VO SS 2009 16. April 2009

Überblick

Asymptotische Schranken

Asymptotische Schranken

Asymptotische Schranken

Asymptotische Schranken

WICHTIG!!!

Motivation

„Warum soll ich heute in DAP2 gehen?"

ANALYSE IST WICHTIG!!!

„Das überzeugt mich nicht."

ANALYSE IST KLAUSUR-RELEVANT!

Laufzeitverhalten eines Algorithmus

wichtig für:

- die Vorhersage
  - Wieviel Zeit, wenn sich die Eingabegröße verdoppelt?

- den Vergleich von Algorithmen
  - Welcher ist besser?

- die Analyse von Algorithmen
  - Wie gut ist der Algorithmus?

Algorithmen-Vergleich

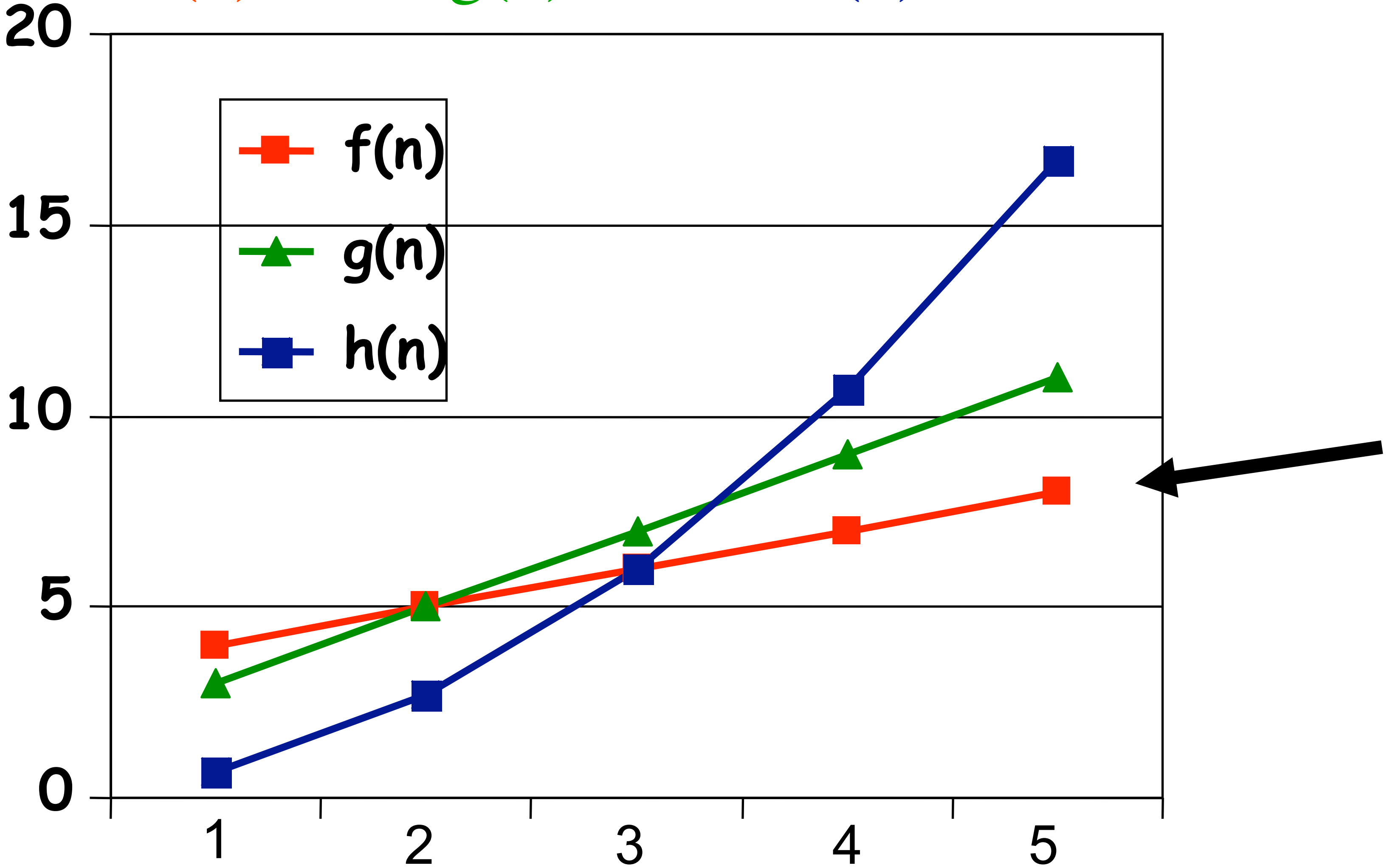
- Fridolin: $f(n)=n+3$
- Gwendoline: $g(n)=2n+1$
- Harlekin: $h(n)=2/3\ n^2$

- Welcher ist der effizienteste?

n	1	2	3	4	5
f(n)	4	5	6	7	8
g(n)	3	5	7	9	11
h(n)	0,7	2,7	6	10,7	16,7

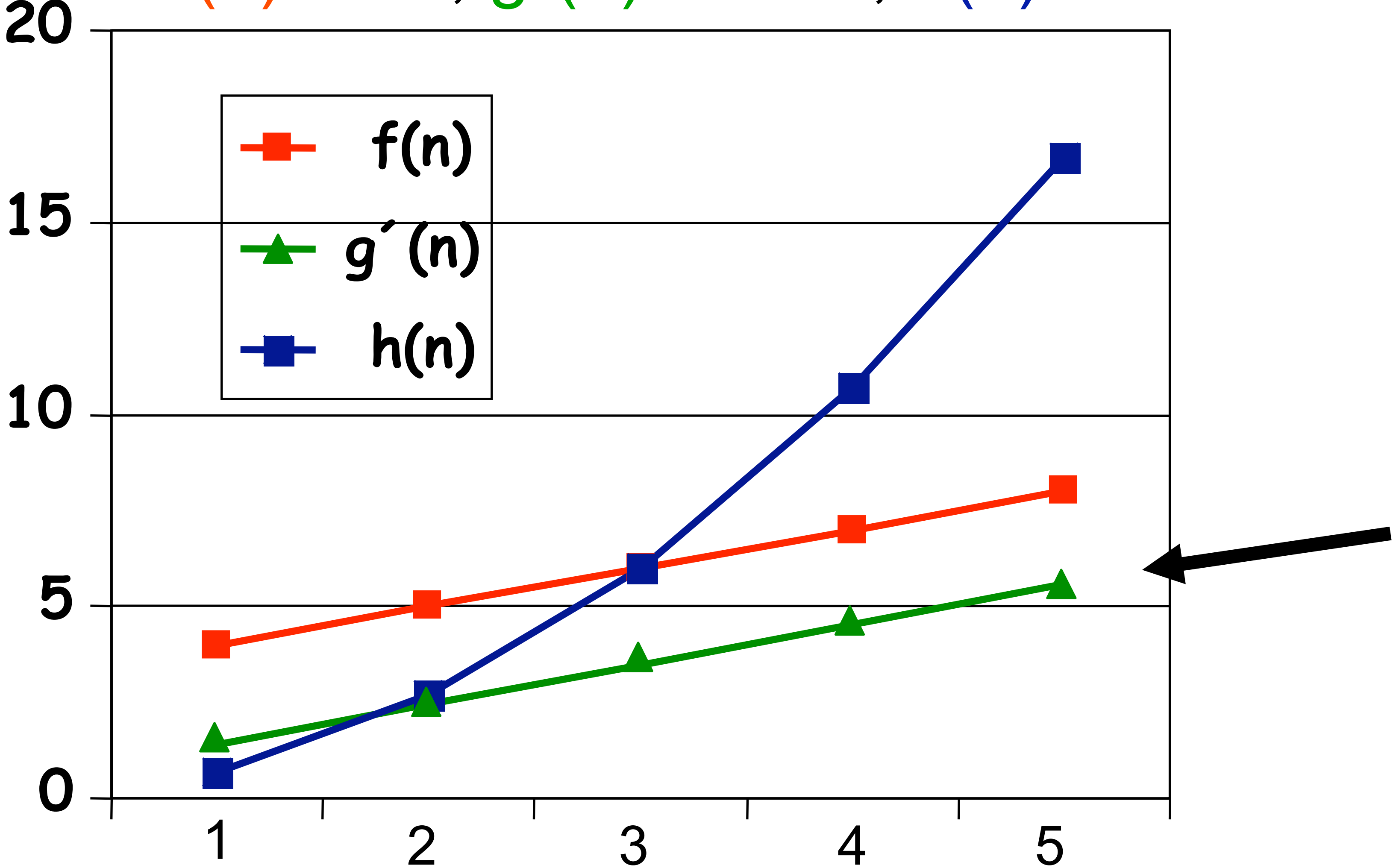
Algorithmen-Vergleich

$f(n)=n+3$, $g(n)=2n+1$, $h(n)=2/3\ n^2$



G kauft sich einen neuen Rechner:

$f(n)=n+3$, $g'(n)=n+1/2$, $h(n)=2/3\ n^2$



Laufzeitvergleich

- Effizienz eines Algorithmus darf nicht vom Rechner abhängen!
- $f(n)$ und $g(n)$ sind ungefähr gleich gut bzgl. Effizienz
- $h(n)$ ist zwar für kleine n besser als $f(n)$, aber uns interessieren „große“ n
- „$f(n)$ wächst ungefähr gleich wie $g(n)$“ „$f(n)$ wächst langsamer als $h(n)$“

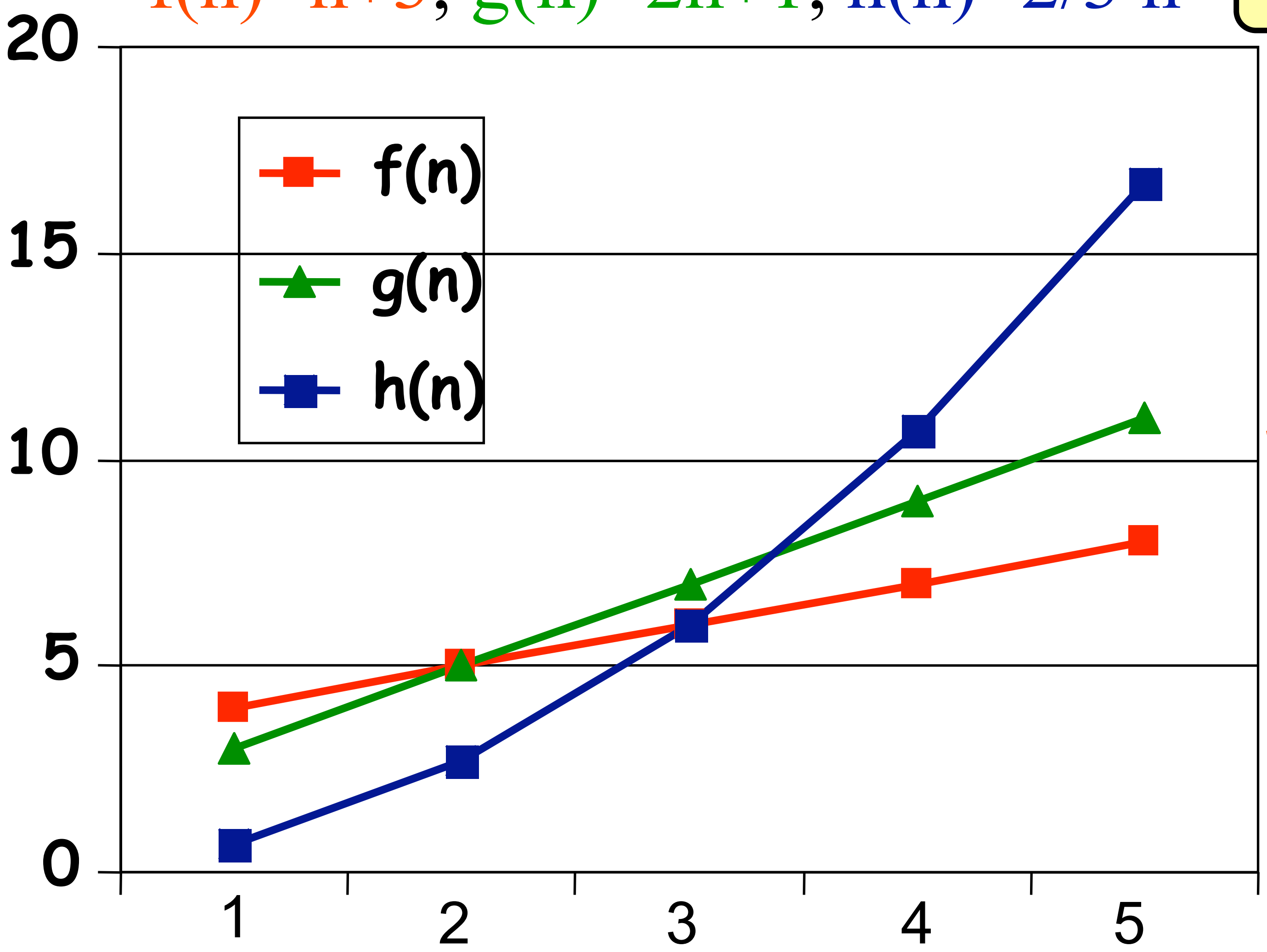
Asymptotische Laufzeit: O-Notation

- O(g(n)) ist die Menge aller nicht-negativen Funktionen f(n), für die ein c und ein n_0 (beide positiv und unabhängig von n) existieren, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq cg(n)$.

$$O(g(n)) = \{f(n) : N \rightarrow R_0^+ \mid (\exists c, n_0 > 0), (\forall n \geq n_0) : f(n) \leq cg(n)\}$$

- „cg(n) ist obere Schranke für f(n) für große n“

$f(n)=n+3$, $g(n)=2n+1$, $h(n)=2/3\ n^2$



„=“ statt „∈“

$f(n)=O(n)$

$g(n)=O(n)$

$\cancel{h(n)=O(n)}$

Beweistechnik für O-Notation: Beispiel

Wir zeigen: $f(n)=n+3=O(n)$ (wir wählen $g(n)=n$)

- Wir müssen also ein c und ein n_0 (beide positiv und unabhängig von n) finden, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq cn$

- Es muß gelten: $n+3 \leq cn$.
- Dies gilt genau dann, wenn $1+3/n \leq c$.
- Dies ist z.B. erfüllt für $n \geq 3$ und $c=2$. Oder auch $n \geq 100$ und $c=1{,}5$.

Tipp: Es gibt beliebig viele Möglichkeiten. Wir müssen für den Beweis eine davon angeben.

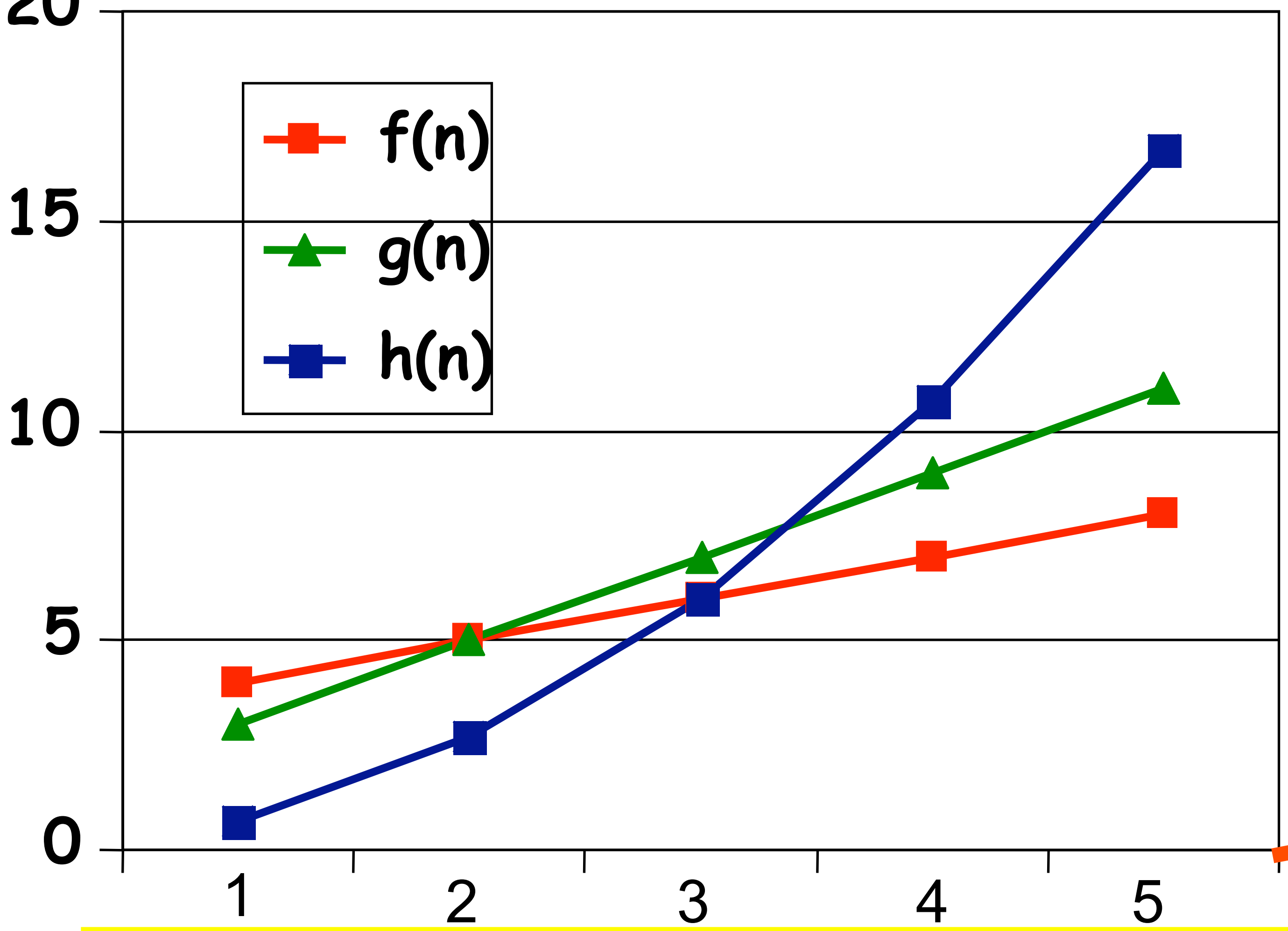
Beweistechnik für $O\Omega\Theta$-Notation: Beispiel

Wir zeigen: $h(n)=2/3n^2 \neq O(n)$ (wir wählen $g(n)=n$)

- Wir zeigen, dass kein c und n_0 (positiv und unabhängig von n) existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $h(n) \leq cn$

- Sonst würde gelten: $2/3n^2 \leq cn$ für alle $n \geq n_0$.
- Dies gilt g.d.w. $2/3n \leq c$ für alle $n \geq n_0$.
- Für „n gegen unendlich“ wird es nie eine konstante Zahl c (unabhängig von n) geben, die dies erfüllt. Dies ist der Widerspruch.

$f(n)=n+3$, $g(n)=2n+1$, $h(n)=2/3\ n^2$



„=“ statt „∈“

$f(n)=O(g(n))$

$g(n)=O(f(n))$

$f(n)=O(h(n))$

$\cancel{h(n)=O(f(n))}$

$g(n)=O(h(n))$

$\cancel{h(n)=O(g(n))}$

Beweisen Sie: Es gilt

$g(n)=O(f(n))$ und $f(n)=O(h(n)) \Rightarrow g(n)=O(h(n))$

Asymptotische Laufzeit: Ω-Notation

- Ω(g(n)) ist die Menge aller nicht-negativen Funktionen f(n), für die ein c und ein n_0 (beide positiv und unabhängig von n) existieren, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \geq cg(n)$.

$$\Omega(g(n)) \;=\; \{f(n) : N \rightarrow R_0^+ \mid (\exists c, n_0 > 0), (\forall n \geq n_0) : f(n) \geq cg(n)\}$$

- „cg(n) ist untere Schranke für f(n) für große n“

Asymptotische Laufzeit: Θ-Notation

- $\Theta(g(n))$ ist die Menge aller nicht-negativen Funktionen $f(n)$, für die ein c_1 und c_2 und ein n_0 (alle positiv und unabhängig von n) existieren, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$.

$$\begin{aligned}\Theta(g(n)) \quad = \quad & \{f(n) : N \rightarrow R_0^+ \mid \\ & (\exists c_1, c_2, n_0 > 0), (\forall n \geq n_0) : \\ & c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}\end{aligned}$$

- „$\Theta(g(n))$ ist die Menge aller Funktionen, die ungefähr gleich stark wachsen wie $g(n)$“

Beweistechnik für $O\Omega\Theta$-Notation: Beispiel

Wir zeigen: $f(n)=n+3=\Theta(n)$ (wir wählen $g(n)=n$)

- Wir müssen also je ein c_1,c_2 und ein n_0 (positiv und unabhängig von n) finden, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $c_1 n \leq f(n) \leq c_2 n$

- Es muß gelten: $c_1 n \leq n+3 \leq c_2 n$.
- Dies gilt genau dann, wenn $c_1 \leq 1+3/n \leq c_2$.
- Dies ist z.B. erfüllt für $n \geq 3$, $c_1=1$, $c_2=2$. Oder auch $n \geq 100$ und $c_1=0{,}5$ und $c_2=1{,}2$.

Tipp: Es gibt beliebig viele Möglichkeiten. Wir müssen für den Beweis eine davon angeben.

Tipp: Üben Sie mehr davon! Klausurverdächtig!!!

Beispiel: Wir zeigen: WorstCase Laufzeit von InsertionSort ist in $\Theta(n^2)$.

- Es muß gelten: $c_1 n^2 \leq an^2+bn+c \leq c_2 n^2$.
- Dies gilt g.d.w. $c_1 \leq a+b/n+c/n^2 \leq c_2$ für große n.
- Wir wissen, dass $a>0$.
- Sei $T= b/n+c/n^2$. Wir können n_0 so wählen, dass $a > 2|T|$ gilt für alle $n \geq n_0$.
- Dann ist z.B. erfüllt für $c_1=a/2$ und $c_2=2a$.
- Denn: $|T| < a/2$ (gilt für $T<0$ und $T\geq 0$) und somit $a+T \geq a/2$ und $a+T \leq 2a$. Die c_i sind positive Konstanten.

Eigenschaften der $O\Omega\Theta$-Notation

- Aus der Worst-Case Laufzeit $\Theta(n^2)$ folgt eine Laufzeit von $O(n^2)$ für beliebige Eingaben.

- Aus der Worst-Case Laufzeit $\Theta(n^2)$ folgt NICHT eine Laufzeit von $\Theta(n^2)$ für beliebige Eingaben.

- Aus der Best-Case Laufzeit $\Theta(n)$ folgt eine Laufzeit von $\Omega(n)$ für beliebige Eingaben.

OΩΘ-Notation in Gleichungen

- Manchmal sieht man auch die O-Notation als Teilterme in Gleichungen, wie z.B. $2n^2+3n+1=2n^2+\Theta(n)$.

- Dies bedeutet: Es gibt eine Funktion $f(n)\in\Theta(n)$ mit $2n^2+3n+1=2n^2+f(n)$.
- Man schreibt dies, um zu verdeutlichen, dass die Funktion im wesentlichen mit $2n^2$ wächst, zu dem „nur“ ein linear wachsender Anteil hinzukommt.

Weitere asymptotische Schranken

- o(g(n)) ist die Menge aller positiven Funktionen f(n), für die der limes von f(n)/g(n) für „n gegen unendlich" gegen 0 geht (es sei g(n)>0).

$$o(g(n)) \;=\; \{f(n) : N \rightarrow R^+ \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0\}$$

Äquivalent hierzu ist:

$$\begin{aligned} o(g(n)) \;=\; & \{f(n) : N \rightarrow R^+ \mid \\ & (\forall c > 0), (\exists n_0 > 0), (\forall n \geq n_0) : f(n) < cg(n)\} \end{aligned}$$

- „o(g(n)) umfaßt alle Funktionen, die echt schwächer wachsen als g(n) selbst".

Weitere asymptotische Schranken

ω(g(n)) ist die Menge aller positiven Funktionen f(n), für die der limes von f(n)/g(n) für „n gegen unendlich" gegen ∞ geht.

$$\omega(g(n)) \;=\; \{f(n) : N \rightarrow R^{+} \mid \lim_{n\rightarrow\infty} f(n)/g(n) = \infty\}$$

Äquivalent hierzu ist:

$$\begin{aligned}\omega(g(n)) \;=\; & \{f(n) : N \rightarrow R^{+} \mid \\ & (\forall c > 0), (\exists n_0 > 0), (\forall n \geq n_0) : f(n) > cg(n)\}\end{aligned}$$

„ω(g(n)) umfaßt alle Funktionen, die echt stärker wachsen als g(n) selbst.

Eigenschaften der $O\Omega\Theta$-Notation

- $O(g(n)) = \Theta(g(n)) \cup o(g(n))$
- $\Theta(g(n)) \cap o(g(n)) = \emptyset$
- $\Omega(g(n)) = \Theta(g(n)) \cup \omega(g(n))$
- $\Theta(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \emptyset$
- $O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) = \Theta(g(n))$
- $f(n)=O(g(n)) \Leftrightarrow g(n)=\Omega(f(n))$
- $f(n)=o(g(n)) \Leftrightarrow g(n)=\omega(f(n))$

- Tipp: Beweisen Sie diese Aussagen! Übungstest- und Klausurverdächtig!!!