

Einleitung & Heiratsproblem

Ablauf Vorlesung & Übung
Prüfungsmodalitäten
Heiratsproblem

VO Graphenalgorithmen – WiSe 2009/10

Markus Chimani – TU Dortmund

Markus Chimani

2

1980: Geboren in Wien, Österreich
2004: Diplom an der **TU Wien**, Informatik
2004: Forschungsaufenthalt in Boston, USA
2005–2008: Promotion an der **TU Dortmund**, Informatik
jetzt: Erste komplett eigene Vorlesung...

Forschungsinteressen:

- Graphenalgorithmen (<< oh!)
- Graphenparameter, Nicht-Planarität
- Netzwerkoptimierung
- Kombinatorische Optimierung
- Theorie ↔ Experimente („Algorithm Engineering“)

Graphenalgorithmen?

3

Was ist ein Graph?

- $G=(V,E)$. Knoten V , Kanten E .
- gerichtet ↔ ungerichtet
- einfach ↔ Multigraph (Mehrfachkanten)

Beobachtung: Viele Probleme lassen sich als Graphenprobleme auffassen!

Bekannte Algorithmen

Traversierungen: Tiefensuche (DFS), Breitensuche (BFS)
Minimaler Spannbaum (Kruskal, Prim)
Kürzeste Wege: SSSP (Dijkstra); APSP (Floyd-Warshall)
Minimum Cost Flow, Max Cut
uvm.

VO Graphenalgorithmen

4

Weiterführende Graphenalgorithmen

Entscheidungsprobleme – Optimierungsprobleme

Techniken

- Effiziente polynomielle Algorithmen
- Approximationsalgorithmen: Primal/Dual
- Parametrisierbare Algorithmen, Fixed Parameter Tractability (FPT)
- Exaktes Lösen NP-schwerer Probleme

Themen (u.a.)

- Baumweite/Treewidth
- Planarität
- Graphisomorphie
- Augmentierungsprobleme
- 3-Zusammenhangszerlegung
- Steinerbaum

Organisatorisches

5

Vorlesung

Mittwochs, 14:15-15:45 – OH14, Raum 304

Unterlagen: Originalliteratur; meine Folien (am Netz) ← Enthalten nicht alles was ich was ich erzähle/aufzeichne...

Übung

Montags, 14:00-16:00 – OH14, Raum 304. **Ungefähr alle 14 Tage!**

Vorraussichtlich: 2.Nov., 16.Nov., 30.Nov., 14.Dez., 11.Jan., 1.Feb.

- 2–3er Gruppen
- Übungsblatt: immer ca. 2 Wochen vor Übung
- Enthält **Aufgaben** und **Kurzvorträge**
- Aufteilung per Zufall durch mich.
- Jede Gruppe im \emptyset über das Semester gleich viele Aufgaben/Kurzvorträge
- **Anmeldung:** heute (Liste)
- Ausgabe erstes Übungsblatt: nächste Woche

Prüfungsmodalitäten

6

Diplomstudium

- **Schwerpunktgebiete:** Algorithmen, Komplexität und formale Modelle; Computational Intelligence und Natural Computing; Intelligente Systeme.
- **Mündliche Fachprüfung (Möglichkeit A):**
über 2VO+2UE, 6LP, Stoff der VO und UE, mündliche Prüfung.
(Formal darf keine Teilnahme an der UE gefordert werden, der Stoff ist jedoch in dem Prüfungsstoff, da 6LP).
- **Leistungsnachweis (Möglichkeit B):**
über 2VO+2UE, 6LP, Stoff der VO und UE, regelmäßige aktive Teilnahme an UE, Fachgespräch.

Master

- **Forschungsbereich:** Algorithmen und Komplexität.
- **Modulprüfung:**
über 2VO+2UE, 6LP, Stoff der VO und UE, regelmäßige aktive Teilnahme an UE, mündliche Prüfung.

Heiratsproblem

Ein Beispiel für ein **Matching**-Problem

Übersicht

Problembeschreibung

- Anwendungen

Algorithmus

Analyse des Algorithmus

- Korrektheit
- Laufzeit

Heiratsproblem??



Problemstellung

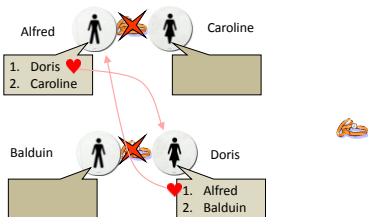
Gegeben

- n Männer und n Frauen
- Jede Person hat eine nach persönlichen Präferenzen sortierte Liste aller Personen des anderen Geschlechts

Gesucht

- **Stabile** Paarungen von jeweils einem Mann und einer Frau

Stabile Paarung?



Instabile Paarungen → Es gibt zwei Personen die beide miteinander glücklicher wären als mit ihren zugeordneten Partnern

Problemstellung, Formal

Gegeben

- n Männer und n Frauen
- Jede Person hat eine nach persönlichen Präferenzen sortierte Liste aller Personen des anderen Geschlechts

Gesucht

- **Stabile** Paarungen von jeweils einem Mann und einer Frau

FORMAL:

Gegeben

- Zwei Mengen P_0 und P_1 , mit $|P_0|=|P_1|=n$
- Für jedes $b \in \{0,1\}$ und jedes $p \in P_b$: eine Totalordnung $<_p$ der Elemente aus P_{1-b}

Gesucht

Bijektive Abbildung $H: P_0 \rightarrow P_1$ mit $\forall m \in P_0, f \in P_1: H(m) = f \vee H(m) <_m f \vee H^{-1}(f) <_f m$

Fragestellung & Anwendungen 13

Fragestellung

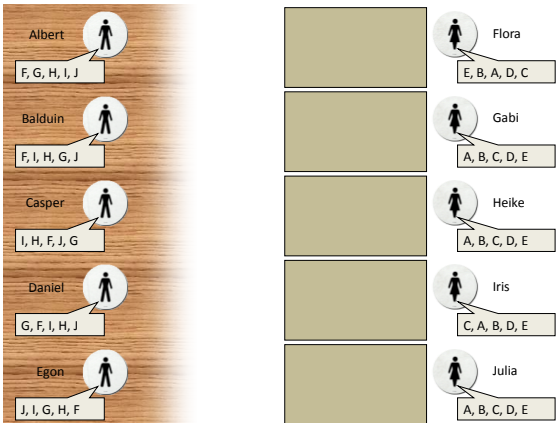
- **Existiert** immer eine stabile Paarung?
- **Wie berechnet** man eine solche stabile Paarung?

Umfeld

Matching- und Assignment-Probleme

Anwendungen

- Zuordnung von Medizinstudierenden zu Krankenhäusern in den USA
- Zulassungen zu Colleges



Algorithmus von Gale & Shapley, 1962 14

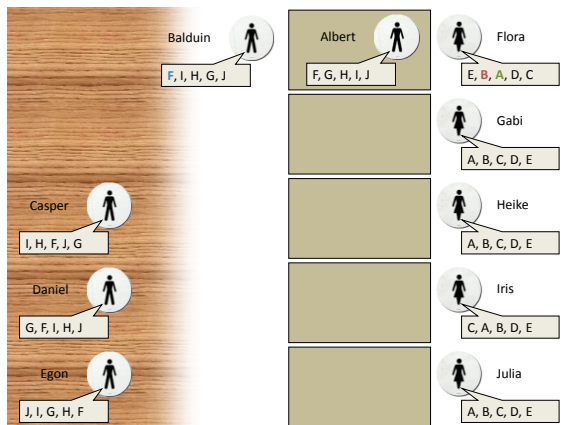
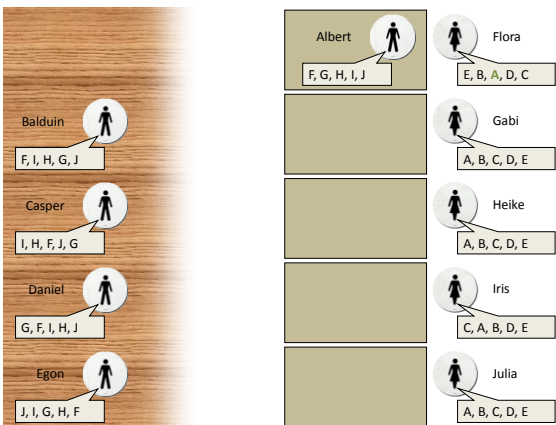
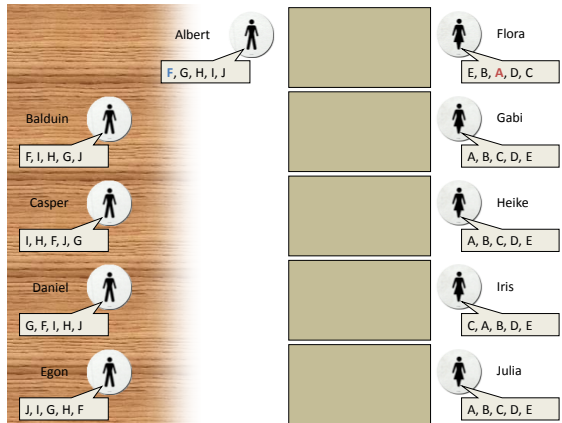
Initialisierung:

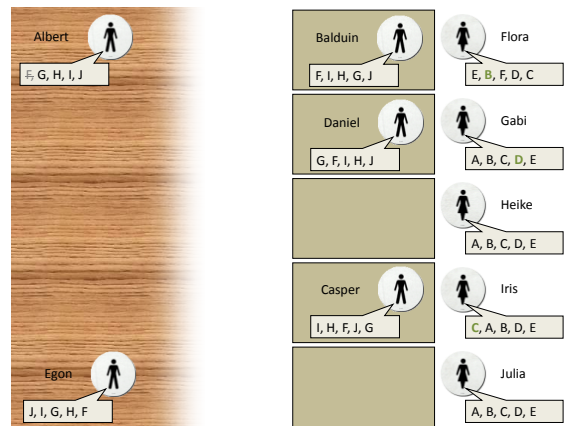
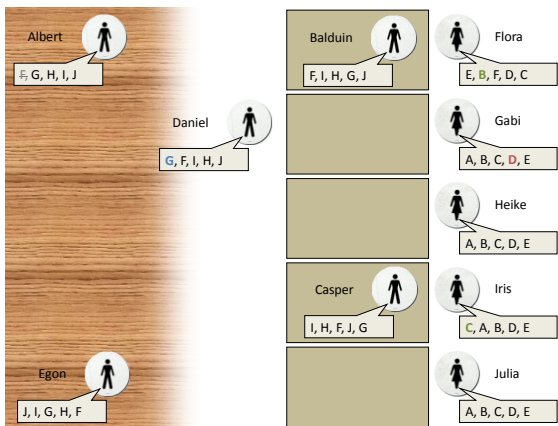
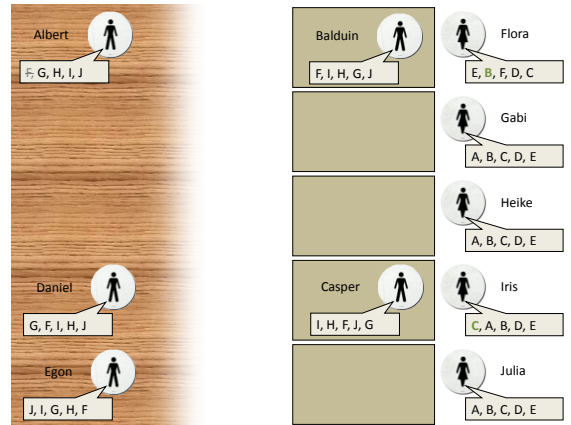
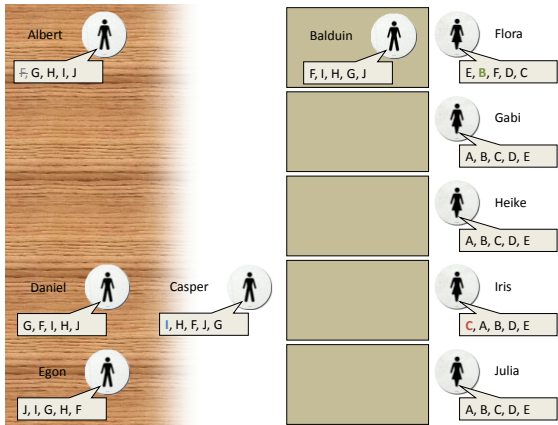
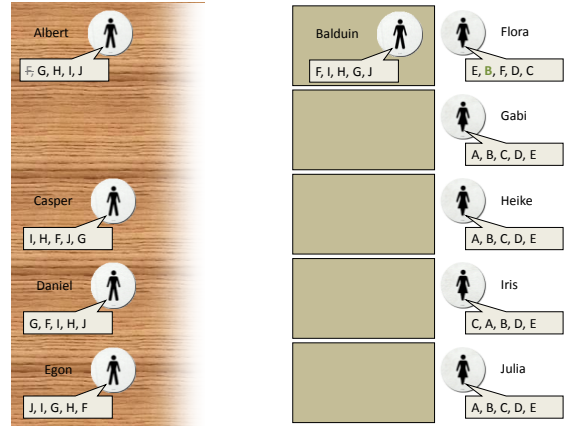
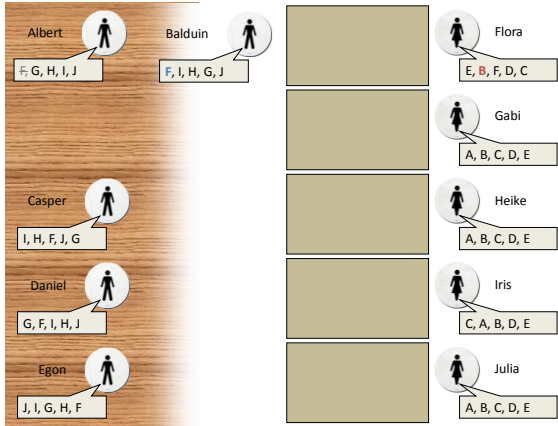
Alle Frauen und Männer sind unverlobt

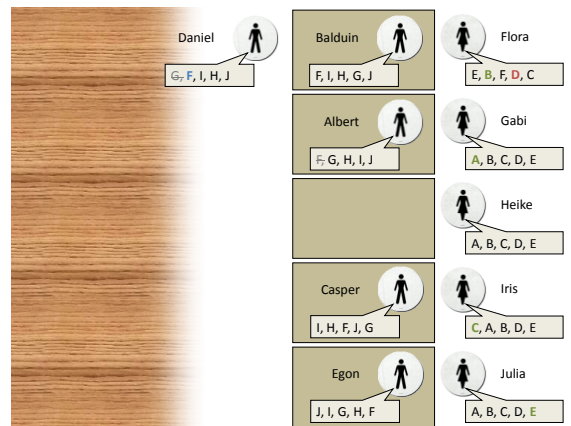
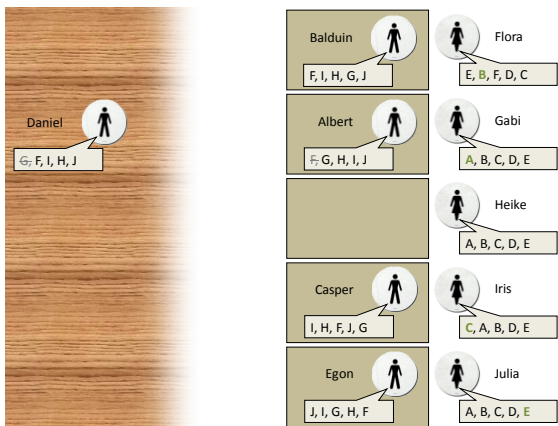
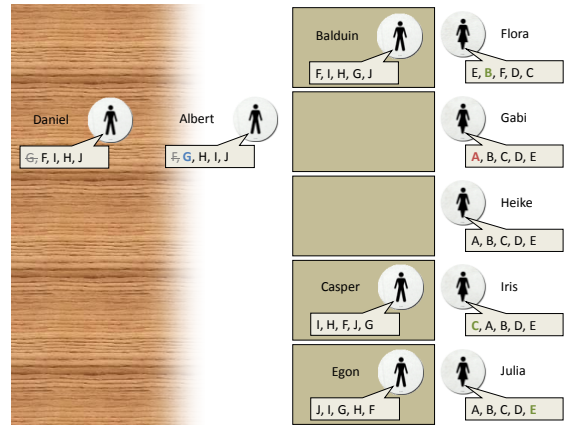
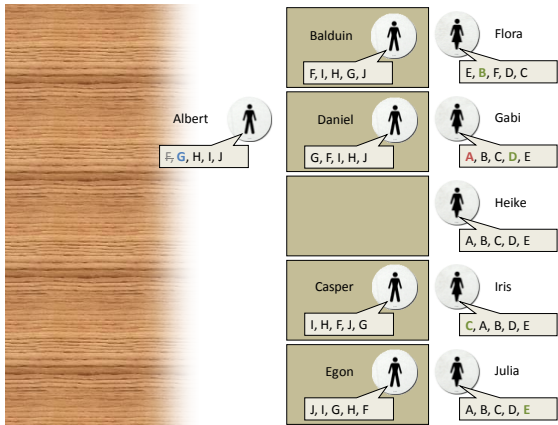
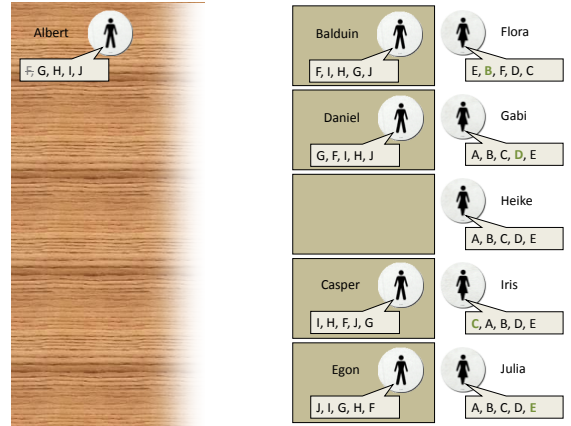
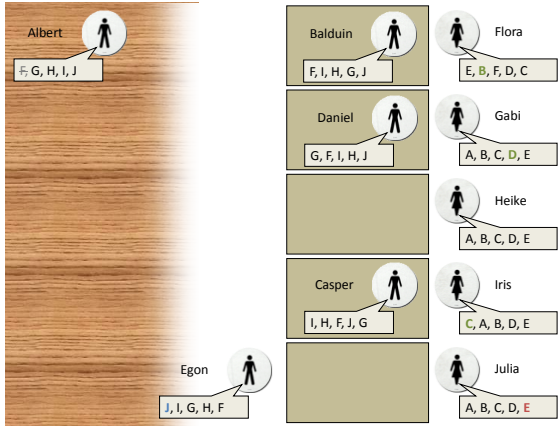
Berechnung:

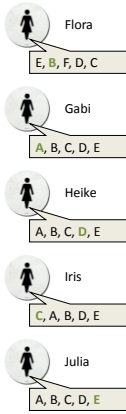
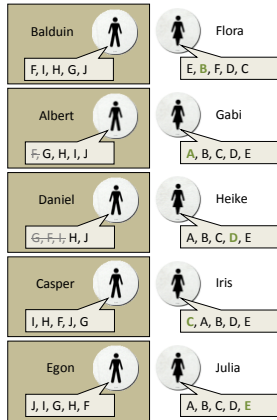
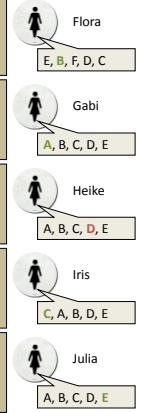
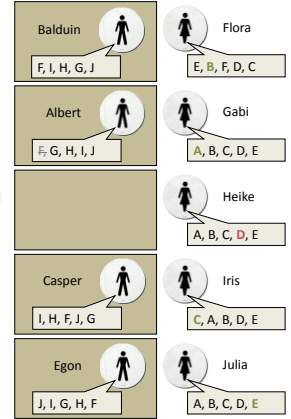
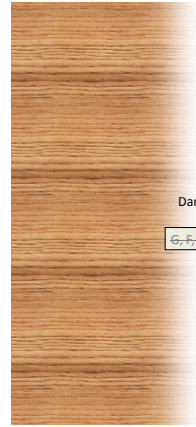
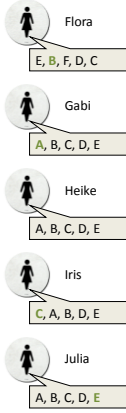
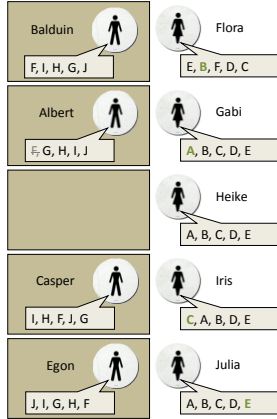
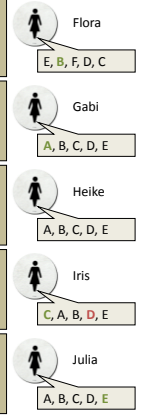
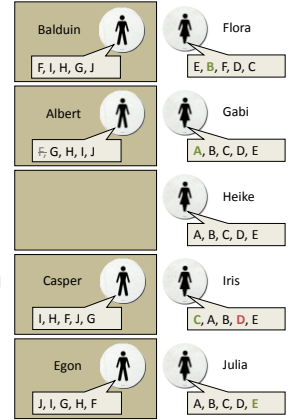
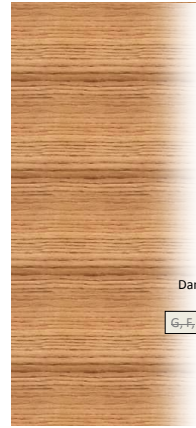
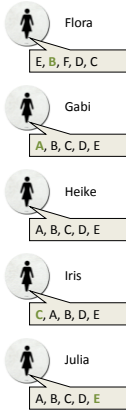
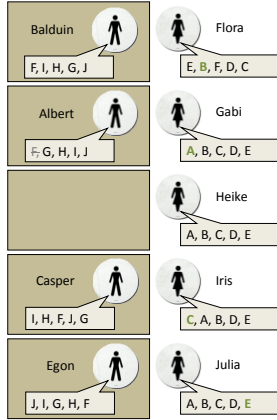
Solange ein unverlobter Mann **M** existiert:

1. **M** macht der ersten Frau **F** auf seiner Liste einen Heiratsantrag
2. Falls **F** unverlobt ist:
F verlobt sich mit **M**
3. Sonst (**F** ist verlobt mit einem Mann **N**):
 - a. Falls **F M** lieber mag als **N**:
F löst Verlobung mit **N**,
F verlobt sich mit **M**
 - b. Sonst (**F** mag **N** lieber als **M**):
M streicht **F** von seiner Liste









ABER: 36

- Terminiert der Algorithmus immer so, dass jeder verlobt ist?
- Sind die Paarungen stabil?
- Gibt es nur eine Lösung?
- Ist die Lösung fair, oder bevorzugt sie die Männer oder die Frauen?
- Wie lange braucht dieser Algorithmus um die Lösung zu finden?

Terminierung? 37

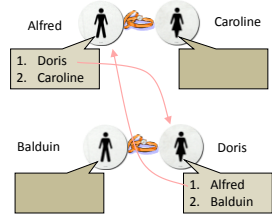
Terminiert der Algorithmus immer so, dass jeder verlobt ist?
 Alternativ: Kann es sein, dass "zum Schluss" ein unverlobter Mann mit einer leeren Liste keiner Frau einen Antrag machen kann?

- Beobachtungen**
- # verlobter Männer = # verlobter Frauen
 - Sobald eine Frau verlobt ist, bleibt sie bis zum Schluss verlobt (ggf. mit wechselndem Partner)

Indirekter Beweis
Annahme: Ein Mann *M* und eine Frau *F* bleiben übrig
Widerspruchsargument: *M* hätte *F* einen Antrag gemacht und sie hätte akzeptiert

Sind die Paarungen stabil? 38

Ja!
Indirekter Beweis:
A hat *D* vor *C* einen Antrag gemacht:
***D* hat akzeptiert:** Sie hätte später nie *A* mit jmd. weiter unten in der Liste getauscht
***D* hat abgelehnt:** Sie war verlobt mit jmd. weiter oben auf der Liste als *A*. Sie hätte später nie diesen mit jmd. noch weiter unten als *A* getauscht.



Ist die Lösung fair? 39

Nein!
 Männer haben Vorteile...



Ist die Lösung fair? 40

Nein!
 Männer haben Vorteile...



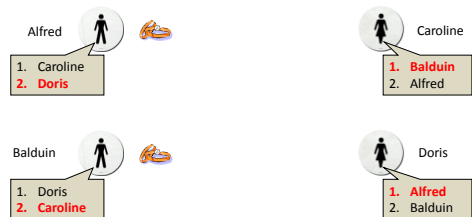
Ist die Lösung fair? 41

Wenn die Frauen die aktive Rolle hätten...



Ist die Lösung fair? 42

Wenn die Frauen die aktive Rolle hätten...



Männer-Optimal 43**Theorem**

Der Algorithmus findet unter allen stabilen Paarungen diejenige, die **Männer-optimal** und **Frauen-pessimal** ist.

Beweis (Männer-optimal)**Annahme:**

Lösung des Algorithmus: $(M_1, F_1), (M_2, F_2), \dots$

Alternative stabile Paarung (**ASP**): $(M_1, F_2), \dots$ mit

- M_1 mag F_2 lieber als F_1
- „erster Fehler“ des Algorithmus

Folgerung:

- M_1 wurde von F_2 zurückgewiesen, d.h. F_2 mag M_2 lieber als M_1
- In (ASP): (M_2, F_3) :
 - M_2 mag F_3 lieber als F_2 → Widerspruch zu „erster Fehler“
 - M_2 mag F_2 lieber als F_3 → Widerspruch zu Stabilität

Laufzeit 44**Theorem**

Der Algorithmus benötigt $O(n^2)$ Zeit.

Beweis

- In jedem Schleifendurchlauf wird ein neuer Antrag gemacht
- n Listen mit je n Einträgen → $O(n^2)$ Anträge/Schleifendurchläufe
- Das Aufwerten eines einzelnen Durchlaufs benötigt nur konstante Zeit
→ Quadratische Laufzeit

Ende 45