Dreizusammenhängende Komponenten und SPQR-Bäume

Carsten Gutwenger

Vorlesung
Graphenalgorithmen
WS 09/10
13. Januar 2010

technische universität dortmund
department of computer science

Überblick

Heute:
- *k*-Zusammenhang, Blöcke
- 3-Zusammenhangskomponenten
- SPQR-Bäume
- Planare Einbettungen

Nächste Woche:
- Algorithmus von Hopcroft und Tarjan

Motivation

SPQR-Bäume haben zahlreiche Anwendungen:
- Graphenzeichnen
  - Optimierung über alle möglichen Einbettungen
  - Kreuzungsminimierung
    - Preprocessing (*Non-planar Core Reduction*)
    - Kanteneinfügen
  - Einbettungsconstraints
  - Aufwärtsplanaritätstest für sT-Graphen
- Isomorphietest für planare Graphen
- digitale Signalverarbeitung
  - Wellendigitalfilter

Literatur

W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*, Vol. 15 of Mathematical Expositions, University of Toronto Press, 1966.

J. E. Hopcroft, R. E. Tarjan, *Dividing a graph into triconnected components*, SIAM Journal on Computing 2, 1973, pp. 135-158.

C. Gutwenger, P. Mutzel, *A linear time implementation of SPQR-trees*, in: J. Marks (ed.), Graph Drawing (GD 2000), LNCS 1984, pp. 77-90, Springer-Verlag, 2001.

k-Zusammenhang

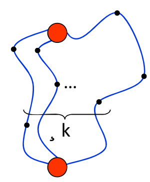
Definition. Sei $k \in \mathbf{N}$.
$G=(V,E)$ ist k-zusammenhängend genau dann wenn
- $|V| > k$ und
- $G-X$ ist zusammenhängend für jedes $X \subseteq V$ mit $|X| < k$.

0-zshgd. $\Rightarrow$ G ist nicht leer.
1-zshgd. $\Rightarrow$ G ist zusammenhängend (und hat mind. 2 Knoten).

k-Zusammenhang (2)

Satz (*Menger's Theorem*).
Ein Graph ist genau dann k-zusammenhängend, wenn es zwischen jedem Paar von Knoten k unabhängige Pfade gibt.

unabhängige Pfade: keine internen Knoten gemeinsam

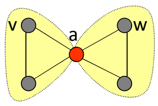


2-Zusammenhang

Bekannt:

a ist Schnittknoten (*cutvertex*) gdw. ex. Knoten v und w, so dass jeder Pfad von v nach w über a führt (a ≠ v, a ≠ w, v ≠ w).

Block: maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Schnittknoten enthält.



Block-Graph

Definition. Seien G=(V,E) und

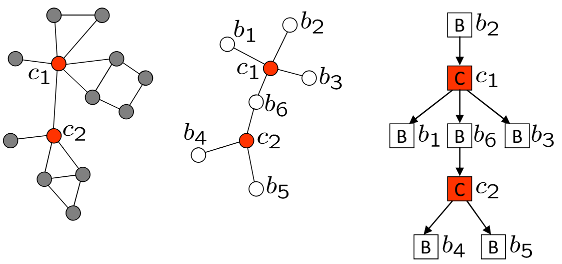
- C ⊆ V Menge der Schnittknoten von G,
- B Menge der Blöcke von G.

Dann ist der (bipartite) Graph

(C ∪ B , { (c,b) | c ∈ b })

der Block-Graph von G.

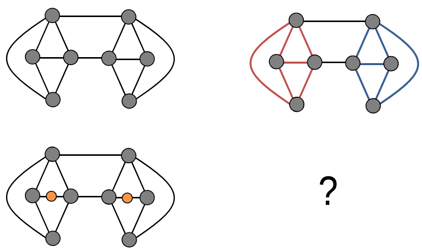
Block-Graph (2)



Graph Block-Graph BC-Baum

3-zusammenhängende Komponenten

Was ist die 3-Zusammenhangsstruktur eines Graphen?



Historie

- S. MacLane (1937)
  - planare, 2-zusammenhängende Graphen
  - *atoms*: maximale „3-zshgd." Teilgraphen
    hier: 3-zshgd. heißt Unterteilung eines 3-zshgd. Graphen!
  - *branch graphs*: parallele Strukturen
  - (implizit: serielle Strukturen)
  - ⇒ Formel für Anzahl der Einbettungen
- W. Tutte (1966)
  - *virtuelle Kanten*: Stellvertreter für Untergraphen, der an genau zwei Knoten mit dem Rest des Graphen verbunden ist.
  - kompakte und eindeutige Darstellung!
- G. Di Battista, R. Tamassia (1989): *reinventing the wheel…*

Separationspaar

Sei G=(V,E) 2-zusammenhängend.

{u,v} ∈ V heißt Separationspaar, falls G - {u,v} nicht zusammenhängend ist.

{u,v} heißt Splitpaar, falls

- {u,v} Separationspaar ist, oder
- u und v sind adjazente Knoten.

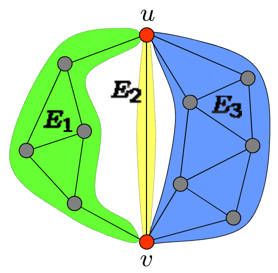
Splitklassen

Sei {u,v} Splitpaar.

Splitklassen von {u,v}:
Partition $E_1,\ldots,E_k$ der Kantenmenge, so dass

$e, f \in E_i \Leftrightarrow$ e und f liegen auf einem Pfad, der u und v höchstens als einen Endpunkt enthält.

Splitklassen (2)



Split-Operation

Seien $E_1,\ldots,E_k$ die Splitklassen eines Splitpaares {u,v}.

Für ein j mit $1 \leq j < k$ seien

$C = E_1 \cup \ldots \cup E_j$ und
$C' = E_{j+1} \cup \ldots \cup E_k$,

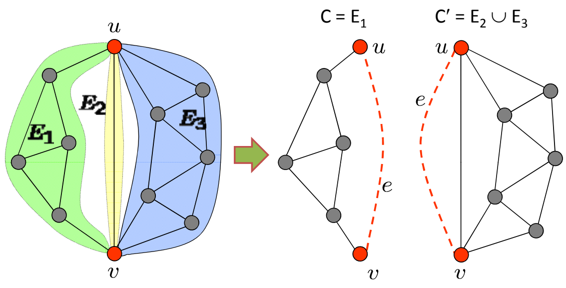
so dass $|C| \geq 2$ und $|C'| \geq 2$.

Eine Split-Operation ersetzt G durch die Split-Graphen

$G_1 = (V(C), C \cup e)$ und
$G_2 = (V(C'), C' \cup e)$,

wobei $e=(u,v,\ell)$ eine neue virtuelle Kante ist.
[ℓ ist dabei ein Label, das den Split eindeutig identifiziert.]

Split-Operation (2)



G G$_1$ G$_2$

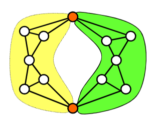
Tutte-Split

Eine Split-Operation heißt Tutte-Split, falls

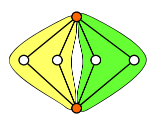
- $C = E_\alpha$ (für ein bel. $1 \leq \alpha \leq k$) und
- G[C] oder G[C'] enthält keinen Schnittknoten.

Tutte-Split (2)

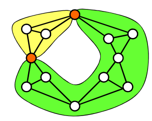
Tutte-Split ja oder nein?



Nein!



Nein!



Ja!

Split-Graphen

Beobachtung. Jeder Split-Graph enthält keinen Schnittknoten und mindestens 3 Kanten.

- 3 Kanten: klar
- Betrachte zwei Knoten p und q in Split-Graph G′
  $\Rightarrow$ p und q liegen auf einem Kreis c in G
  Ersetze (falls nötig) die Kanten auf c, die nicht in G′ sind, durch die virtuelle Kante des Splits
  $\Rightarrow$ p und q liegen auf Kreis in G′

Split-Graphen

Führe solange Split-Operationen durch wie möglich $\rightarrow$ Splitgraphen

Lemma. Die Gesamtzahl aller Kanten in Splitgraphen ist beschränkt durch 3 |E| - 6.

Beweis durch Induktion nach Anzahl der Kanten m:

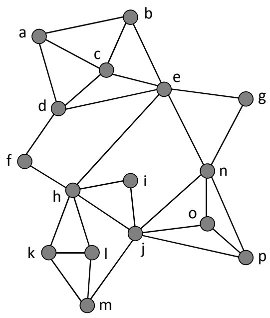
- m = 3: $3 \leq 3m-6$
- m-1 $\rightarrow$ m:
  - kein Split möglich: fertig!
  - Splitte in G′ mit k+1 Kanten und G′′ mit m-k+1 Kanten
  - Gesamtzahl beschränkt durch:
    $3(k+1)-6 + 3(m-k+1)-6 = (3k-3) + (3m-3k-3) = 3m-6$

3-Zusammenhangskomponenten

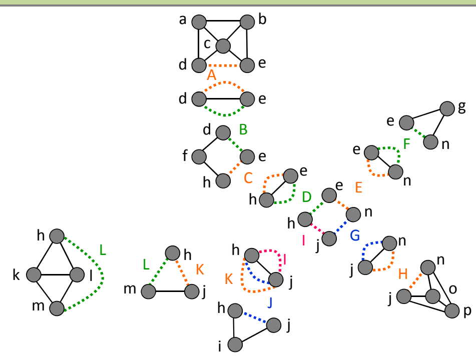
Definition. Wir erhalten die 3-Zusammenhangskomponenten eines Graphen, indem wir solange Tutte-Splits durchführen wie möglich.

3-Zusammenhangskomponenten (2)

Beispiel:



3-Zusammenhangskomponenten (3)



3-Zusammenhangskomponenten (4)

Theorem. Jede 3-Zusammenhangskomponente ist

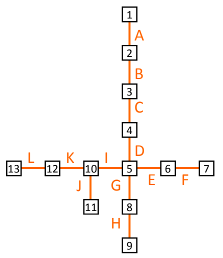
a) ein einfacher, 3-zshgd. Graph, 3-zshgd.

b) ein Kreis (Polygon) mit mind. 3 Kanten, oder seriell

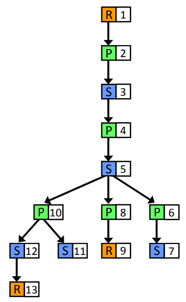
c) ein Bündel von mind. 3 parallelen Kanten. parallel

Theorem. Die 3-Zusammenhangskomponenten eines Graphen sind eindeutig.

SPQR-Baum



Baum T(G)



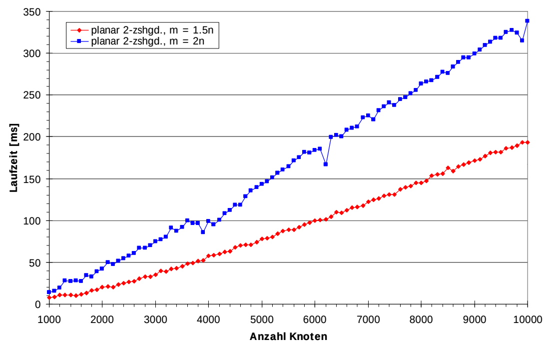
SPQR-Baum

SPQR-Bäume im OGDF

- **StaticSPQRTree**
  - Hopcroft/Tarjan Implementierung
- **StaticPlanarSPQRTree**
  - zusätzlich: „Aufzählen" von Einbettungen
- **DynamicSPQRTree**
  - G. Di Battista, R. Tamassia, *On-line maintenance of triconnected components with SPQR-trees*, Algorithmica 15(4), 1996, pp. 302-318.
- **DynamicPlanarSPQRTree**

`http://www.ogdf.net`

Laufzeit Aufbau SPQR-Baum



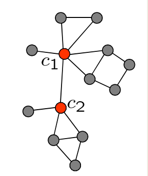
Planare Einbettungen

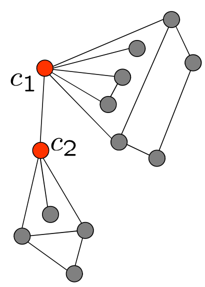
Definition.
Eine kombinatorische Einbettung eines Graphen G ist gegeben durch die zyklischer Reihenfolge der Kanten um jeden Knoten in einer planaren Zeichnung von G.

äquivalent:
zyklische Reihenfolge der Kanten in jeder Fläche

planare Einbettung: komb. Einbettung + Außenfläche

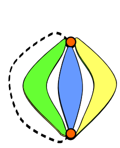
Aufzählen aller Einbettungen (1)





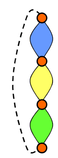
Aufzählen aller Einbettungen (2)

P-Knoten



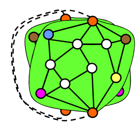
(k-1)! Permutationen

S-Knoten



1 Einbettung

R-Knoten



2 Einbettungen

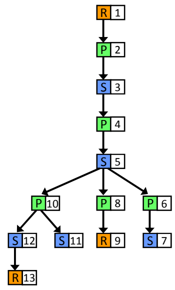
Aufzählen aller Einbettungen (3)

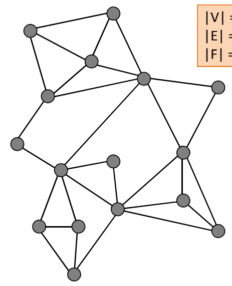
Anzahl der kombinatorischen Einbettungen eines 2-zshgd. Graphen:

$$2^{|R|} \cdot \prod_{\mu \in P} (n_\mu - 1)!$$

R	Menge der R-Knoten
P	Menge der P-Knoten
n_μ	Anzahl Kanten im P-Knoten μ

Aufzählen aller Einbettungen (4)





|V| = 16
|E| = 29
|F| = 29-16+2 = 15

komb. Einbettungen: $2^3 \cdot 2^4 \cdot 3! =$ **768**

planare Einbettungen: $15 \cdot 768 =$ **11520**

Split-Komponenten (1)

Was passiert, wenn wir immer beliebige Split-Operationen durchführen?

→ Split-Komponenten

Theorem. Jede Split-Komponente ist

a) ein einfacher, 3-zshgd. Graph,

b) ein Kreis mit genau 3 Kanten, oder

c) ein Bündel von genau 3 parallelen Kanten.

Theorem. Die Split-Komponenten eines Graphen sind **nicht** eindeutig.

Split-Komponenten (2)

Theorem. Man erhält die 3-Zusammenhangskomponenten aus den Split-Komponenten, indem man

- Dreiecke zu maximalen Polygonen, und
- 3-er Bündel zu maximalen Bündeln verschmelzt.