Varianten des Travelling Salesman Problem (TSP)

Lars Schmidt und Dominik Wolff

11.01.2010

Travelling Salesman Problem (TSP)
- TSP als ILP

Asymmetrische Travelling Salesman Problem (ATSP)
- ATSP als ILP

multiple Travelling Salesman Problem (mTSP)
- mTSP als ILP

Prize Collecting Travelling Salesman Problem (PCTSP)
- PCTSP als ILP

Outline

Travelling Salesman Problem (TSP)
- TSP als ILP

Asymmetrische Travelling Salesman Problem (ATSP)
- ATSP als ILP

multiple Travelling Salesman Problem (mTSP)
- mTSP als ILP

Prize Collecting Travelling Salesman Problem (PCTSP)
- PCTSP als ILP

Was ist das Travelling Salesman Problem?

Gegeben: n Städte und die Distanzen zwischen diesen
Gesucht: Kürzeste Tour in der jede Stadt genau einmal besucht wird

Was ist das Travelling Salesman Problem?

Gegeben: n Städte und die Distanzen zwischen diesen
Gesucht: Kürzeste Tour in der jede Stadt genau einmal besucht wird

Darstellung als Graphenproblem

Gegeben: Ein Vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit $w : E \to R^+$
Gesucht: Hamiltonkreis $C \subseteq E$ mit $min \sum_{e \in E} w(e)$

Wiederholung TSP als Integer Lineares Programm

Nun als Integer Lineares Programm (ILP):

$$
\begin{array}{llll}
\text{min} & w^T x = \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e & & \\
\text{s.t.} & x(\delta(v)) = 2 & \forall v \in V & (\textit{Gradungleichung}) \\
 & x(\delta(W)) \geq 2 & \forall \emptyset \neq W \subset V & (\textit{Subtour Ungleichung}) \\
 & x \in \{0,1\}^{|E|} & &
\end{array}
$$

Nun als Integer Lineares Programm (ILP):

$$
\begin{array}{llll}
\min & w^T x = \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e & & \\
\text{s.t.} & x(\delta(v)) = 2 & \forall v \in V & (\mathit{Gradungleichung}) \\
& x(\delta(W)) \geq 2 & \forall \emptyset \neq W \subset V & (\mathit{Subtour\ Ungleichung}) \\
& x \in \{0,1\}^{|E|} & &
\end{array}
$$

Verwendete Notationen

Mit $F \subseteq E$ und $W \subseteq V$:

- $\delta(v) := \{\{v, u\} \in E\}$ = zu v inzidente Kanten
- $\delta(W) := \{\{v, u\} \in E \mid v \in W, u \notin W\}$ = Kanten die W verlassen
- $x(F) := \sum_{e \in F} x_e$ = Anzahl der verwendeten Kanten aus F

Outline

Was ist das asymmetrische Travelling Salesman Problem?

Gegeben: n Städte und Distanzen zwischen Paaren von Städten. Allerdings kann die Distanz von Stadt A zu Stadt B ungleich der Distanz von Stadt B zu Stadt A sein. Somit sind die Distanzen asymmetrisch.

Gesucht: Kürzeste Tour in der jede Stadt genau einmal besucht wird

ATSP als ILP

Da nun Distanzen asymmetrisch sind, wird $w_{i,j}$, als Kantengewichtsfkt., und $x_{i,j}$ als Kantenfkt. eingeführt mit $i, j \in V$.

Neue Zielfunktion

Somit ergibt sich die Zielfunktion zu: $\min \sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j}$

ATSP als ILP

Da nun Distanzen asymmetrisch sind, wird $w_{i,j}$, als Kantengewichtsfkt., und $x_{i,j}$ als Kantenfkt. eingeführt mit $i, j \in V$.

Neue Zielfunktion

Somit ergibt sich die Zielfunktion zu: $\min \sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j}$

Neue Nebenbedingungen für alte Gradungleichung

Für jeden Stadtknoten muss der Eingangsgrad Eins sein:
$\sum_{i \in V} x_{i,j} = 1$ für alle $j \in V$
Für jeden Stadtknoten muss der Ausgangsgrad Eins sein:
$\sum_{j \in V} x_{i,j} = 1$ für alle $i \in V$

ATSP als ILP

Da nun Distanzen asymmetrisch sind, wird $w_{i,j}$, als Kantengewichtsfkt., und $x_{i,j}$ als Kantenfkt. eingeführt mit $i, j \in V$.

Neue Zielfunktion

Somit ergibt sich die Zielfunktion zu: $\min \sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j}$

Neue Nebenbedingungen für alte Gradungleichung

Für jeden Stadtknoten muss der Eingangsgrad Eins sein:
$\sum_{i \in V} x_{i,j} = 1$ für alle $j \in V$
Für jeden Stadtknoten muss der Ausgangsgrad Eins sein:
$\sum_{j \in V} x_{i,j} = 1$ für alle $i \in V$

Neue Nebenbedingung für alte Subtour Ungleichung

Es dürfen keine Kreise existieren mit weniger als $|V|$ Knoten:
$\sum_{i \in W} \sum_{j \in W} x_{i,j} \leq |W| - 1$ für alle $\emptyset \neq W \subset V$

ATSP als ILP

Das vollständige ILP sieht wie folgt aus:

ATSP ILP:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j} & \\
\text{s.t.} & \sum_{i \in V} x_{i,j} = 1 & \forall j \in V \\
 & \sum_{j \in V} x_{i,j} = 1 & \forall i \in V \\
 & \sum_{i \in W} \sum_{j \in W} x_{i,j} \leq |W| - 1 & \forall \emptyset \neq W \subset V \\
 & x_{i,j} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in V
\end{array}
$$

Das mTSP

Was ist das multiple Travelling Salesmen Problem?

Gegeben: n Städte und die Distanzen zwischen diesen.
m Salesmen die alle in der gleichen Stadt starten.

Gesucht: Die kürzeste zurückgelegte Gesamtstrecke aller Salesmen unter den Bedingungen, dass jede Stadt genau von einem Salesman besucht wurde und am Ende alle Salesmen wieder in die Anfangsstadt zurückkehren.

mTSP als ILP

Zielfunktionsänderung

Die Zielfunktion muss nicht geändert werden, da mehrere Salesmen für sie keine Rolle spielen: min $\sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j}$

mTSP als ILP

Zielfunktionsänderung

Die Zielfunktion muss nicht geändert werden, da mehrere Salesmen für sie keine Rolle spielen: $\min \sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j}$

Änderung der Gradungleichungen

Auch die bekannten Gradungleichungen bleiben erhalten für jeden Knoten außer den Startknoten:

$\sum_{i \in V} x_{i,j} = 1$ für alle $j \in V \backslash \{1\}$

$\sum_{j \in V} x_{i,j} = 1$ für alle $i \in V \backslash \{1\}$

mTSP als ILP

Zielfunktionsänderung

Die Zielfunktion muss nicht geändert werden, da mehrere Salesmen für sie keine Rolle spielen: min $\sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j}$

Änderung der Gradungleichungen

Auch die bekannten Gradungleichungen bleiben erhalten für jeden Knoten außer den Startknoten:
$\sum_{i \in V} x_{i,j} = 1$ für alle $j \in V \backslash \{1\}$
$\sum_{j \in V} x_{i,j} = 1$ für alle $i \in V \backslash \{1\}$

Änderung der Subtour Ungleichung

Für die Subtour Ungleichung darf der Startknoten ebenfalls nicht mehr betrachtet werden:
$\sum_{i \in W} \sum_{j \in W} x_{i,j} \leq |W| - 1$ für alle $\emptyset \neq W \subseteq V \backslash \{1\}$

mTSP als ILP

Neue Nebenbedingungen für das mTSP

Um sicherzustellen, dass genau m Salesmen aus der Anfangsstadt starten gilt: $\sum_{j \in V} x_{1,j} = m$
Da diese auch alle in die Anfangsstadt zurückkehren müssen, muss zu dem gelten: $\sum_{i \in V} x_{i,1} = m$

mTSP als ILP

Neue Nebenbedingungen für das mTSP

Um sicherzustellen, dass genau m Salesmen aus der Anfangsstadt starten gilt: $\sum_{j \in V} x_{1,j} = m$
Da diese auch alle in die Anfangsstadt zurückkehren müssen, muss zu dem gelten: $\sum_{i \in V} x_{i,1} = m$

mTSP ILP:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j} & \\
\text{s.t.} & \sum_{i \in V} x_{i,j} = 1 & \forall j \in V \backslash \{1\} \\
& \sum_{j \in V} x_{i,j} = 1 & \forall i \in V \backslash \{1\} \\
& \sum_{i \in W} \sum_{j \in W} x_{i,j} \leq |W| - 1 & \forall \emptyset \neq W \subseteq V \backslash \{1\} \\
& \sum_{j \in V} x_{1,j} = m & \\
& \sum_{i \in V} x_{i,1} = m & \\
& x_{i,j} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in V
\end{array}
$$

Outline

Was ist das Prize Collecting Travelling Salesman Problem?

Gegeben: n Städte und Reisekosten zwischen Paaren von Städten. Ein Salesman bekommt einen Gewinn (prize) in jeder auf der Reise besuchten Stadt, muss aber eine Strafe (penalty) für alle nicht besuchten Städte zahlen.

Was ist das Prize Collecting Travelling Salesman Problem?

Gegeben: n Städte und Reisekosten zwischen Paaren von Städten. Ein Salesman bekommt einen Gewinn (prize) in jeder auf der Reise besuchten Stadt, muss aber eine Strafe (penalty) für alle nicht besuchten Städte zahlen.

Gesucht: Reisekosten und Strafe sollen möglichst gering gehalten werden, während möglichst genug Städte besucht werden müssen um einen vorgegebenen Gewinnbetrag zu erreichen.

PCTSP als ILP

Es gibt nun Strafbeträge für jede nicht besuchte Stadt, die durch die Funktion p_i beschrieben werden und Gewinnbeträge für besuchte Städte, die durch g_i beschrieben werden.
Zudem gibt es eine weitere Variable y_i mit $i \in V$, die gleich Null ist, falls Stadt i besucht wird.

Neue Zielfunktion

Zielfunktion: min $\sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j} + \sum_{i \in V} p_i \cdot y_i$

PCTSP als ILP

Es gibt nun Strafbeträge für jede nicht besuchte Stadt, die durch die Funktion p_i beschrieben werden und Gewinnbeträge für besuchte Städte, die durch g_i beschrieben werden.
Zudem gibt es eine weitere Variable y_i mit $i \in V$, die gleich Null ist, falls Stadt i besucht wird.

Neue Zielfunktion

Zielfunktion: min $\sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j} + \sum_{i \in V} p_i \cdot y_i$

Neue Nebenbedingungen für alte Gradungleichung

Nun müssen wir nur Städte betrachten die auch besucht werden also ergeben sich die Ungleichungen zu:
$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{i,j} + y_j = 1$ für alle $j \in V$
$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{i,j} + y_i = 1$ für alle $i \in V$

PCTSP als ILP

Neue Nebenbedingung für alte Subtour Ungleichung

Es dürfen keine Kreise existieren, die die Anfangsstadt nicht enthalten: $\sum_{i,j \in W} x_{i,j} \leq \sum_{i \in W \setminus \{k\}} 1 - y_i$
für alle $k \in W$ und $\emptyset \neq W \subseteq V \setminus \{1\}$

PCTSP als ILP

Neue Nebenbedingung für alte Subtour Ungleichung

Es dürfen keine Kreise existieren, die die Anfangsstadt nicht enthalten: $\sum_{i,j \in W} x_{i,j} \leq \sum_{i \in W \setminus \{k\}} 1 - y_i$
für alle $k \in W$ und $\emptyset \neq W \subseteq V \setminus \{1\}$

Neue Nebenbedingungen für Gewinn

Der nicht erreichte Gewinn muss kleiner sein, als der mögliche Gesamtgewinn abzüglich der Gewinnvorgabe g:
$\sum_{i \in V} g_i \cdot y_i \leq \sum_{i \in V} g_i - g$ für alle $j \in V$

PCTSP als ILP

Neue Nebenbedingung für alte Subtour Ungleichung

Es dürfen keine Kreise existieren, die die Anfangsstadt nicht enthalten: $\sum_{i,j \in W} x_{i,j} \leq \sum_{i \in W \setminus \{k\}} 1 - y_i$
für alle $k \in W$ und $\emptyset \neq W \subseteq V \setminus \{1\}$

Neue Nebenbedingungen für Gewinn

Der nicht erreichte Gewinn muss kleiner sein, als der mögliche Gesamtgewinn abzüglich der Gewinnvorgabe g:
$\sum_{i \in V} g_i \cdot y_i \leq \sum_{i \in V} g_i - g$ für alle $j \in V$

Neue Nebenbedingung für Anfangsstadt

Die Anfangsstadt muss immer enthalten sein: $y_1 = 0$

PCTSP als ILP

Das vollständige ILP sieht wie folgt aus:

PCTSP ILP:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i,j \in V} w_{i,j} \cdot x_{i,j} + \sum_{i \in V} p_i \cdot y_i & \\
\text{s.t.} & \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{i,j} + y_j = 1 & \forall j \in V \\
& \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{i,j} + y_i = 1 & \forall i \in V \\
& \sum_{i,j \in W} x_{i,j} \leq \sum_{i \in W \setminus \{k\}} 1 - y_i & \forall k \in W, \emptyset \neq W \subseteq V \setminus \{1\} \\
& \sum_{i \in V} g_i \cdot y_i \leq \sum_{i \in V} g_i - g & \forall j \in V \\
& y_1 = 0 & \\
& x_{i,j} \in \{0,1\} & \forall i,j \in V \\
& y_i \in \{0,1\} & \forall i \in V
\end{array}
$$