Kapitel 3: Sortieren

Professor Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für Algorithm Engineering, LS11

4. VO 13. April 2006

Überblick

- ADT Dictionary

- Einführung in das Sortierproblem

- Insertion-Sort
- Selection-Sort
- Merge-Sort

Motivation

„Warum soll ich hier bleiben?"

Sortierverfahren sind WICHTIG!!!

„Ich kann doch schon sortieren."

ABER ES GEHT SCHNELLER!

Der ADT Dictionary

„Dictionary": Wörterbuch

- **Wertebereich:** $D \subseteq K \times V$, wobei K Schlüssel (key) bezeichnet und V die Werte. Dabei ist jedem $k \in K$ höchstens ein $v \in V$ zuordnet.

- **Operationen:**
  - **Einfügen, Entfernen, Suchen** (s. nächste Folie)
  - Im folgenden sei Q ein Dictionary vor Anwendung der Operationen.

Operationen des ADT Dictionary

- **INSERT(K k,V v)**
  - Falls k nicht schon in D ist, dann wird ein neuer Schlüssel k mit Wert v in D eingefügt, andernfalls wird der Wert des Schlüssels k auf v geändert.

INSERT(k,v): Falls k neu: $D:=D \cup (k,v)$, sonst

$D:=D \setminus (k,v') \cup (k,v)$

- **DELETE(K k)**
  - Entfernt Schlüssel k mit Wert aus D (falls k in D)

- **SEARCH(K k): V**
  - Gibt den bei Schlüssel k gespeicherten Wert zurück (falls k in D)

Der ADT Dictionary

- **Wörterbuchproblem:** Finde eine Datenstruktur mit möglichst effizienten Implementierungen für die Operationen eines Dictionary.

- **Naive Lösung:** als Paar von Feldern:
  $\rightarrow$ Lineare Laufzeit **für alle Operationen**

- **Im Laufe der Vorlesung:** einige weitaus bessere Verfahren!

Kapitel 3: Sortieren

„Unser" Sortierproblem

Eingabe: Folge von Datensätzen $s_1,s_2,\ldots,s_n$ mit Schlüsseln $k_1,k_2,\ldots,k_n$, auf denen eine Ordnungsrelation „≤" definiert ist.

Ausgabe: Permutation $\pi : \{1,2,\ldots,n\} \rightarrow \{\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(n)\}$, so dass die Umordnung der Datensätze gemäß π die Schlüssel in aufsteigende Reihenfolge bringt: $k_{\pi(1)} \leq k_{\pi(2)} \leq \ldots \leq k_{\pi(n)}$

Speicherung in Feld: A[1],…,A[n]

Ansprechbar: Schlüssel: A[i].key

Informationsfeld: A[i].info

Laufzeitmessung

- Anzahl der durchgeführten Schlüsselvergleiche („Comparisons“) für Best-Case, Worst-Case und Average-Case:
- $C_{best}(n)$, $C_{worst}(n)$, $C_{avg}(n)$

- Anzahl der durchgeführten Bewegungen („Movements“) von Datensätzen für Best-Case, Worst-Case und Average-Case:
- $M_{best}(n)$, $M_{worst}(n)$, $M_{avg}(n)$

Eigenschaften von Sortierverfahren

- **Intern/Extern:** Geht das Cerfahren davon aus, dass alle Daten im Hauptspeicher sind, dann → **intern**
- Manchmal müssen Daten aus latzgründen ausgelagert werden (Platte); Verfahren, die hier gut geeignet sind → **extern**

- **In situ:** Benötigt ein Sortieralgorithmus zusätzlich zur Eingabe höchstens konstant viel zusätzlichen Speicherplatz, dann → **in situ**

Eigenschaften von Sortierverfahren

- **Adaptiv:** Laufzeit abhängig von dem Grad der Vorsortierung der Daten; falls besser für vorsortierte Daten, dann → **adaptiv**

- **Stabil:** gleiche Reihenfolge von Datensätzen mit gleichem Schlüssel vor und nach dem Sortieren, dann → **stabil**

3.1 Allgemeine Sortierverfahren

- **Voraussetzung:** je zwei Schlüssel k_i und k_j sind vergleichbar, also entweder gilt $k_i \leq k_j$ oder $k_j \leq k_i$.

3.1.1 Insertion-Sort / Analyse

- **Anzahl der Schlüsselvergleiche:**

$C_{best}(n)=$

InsertionSort(ref A)

Eingabe/Ausgabe: Zahlenfolge in Feld A[1..n]

```
(1) for k:=2,…,n {
(2)   key:=A[k]
(3)   i:=k
(4)   while i>1 and A[i−1]>key {
(5)     A[i]:=A[i−1]
(6)     i:=i−1
(7)   }
(8)   A[i]:=key
(9) }
```

3.1.1 Insertion-Sort / Analyse

- **Anzahl der Schlüsselvergleiche:**

  $C_{best}(n)=\Theta(n)$ und $C_{avg}(n)=C_{worst}(n)=\Theta(n^2)$

- **Anzahl der Datenbewegungen:**

  $M_{best}(n)=\Theta(n)$ und $M_{avg}(n)=M_{worst}(n)=\Theta(n^2)$

- **Eigenschaften:**
  - in situ? ☺
  - adaptiv? ☺
  - stabil? ☺

Inversionen

In einer Permutation $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$ heißt ein Paar (π_i, π_j) eine Inversion, wenn gilt: $i < j$ und $\pi_i > \pi_j$.

- Die Anzahl der Inversionen einer Folge π heißt Inversionszahl und ist ein Maß für die Vorsortierung einer Folge.

- Es gilt: Eine Folge ist sortiert g.d.w. die Anzahl ihrer Inversionen gleich 0 ist.
- Im schlimmsten Fall besitzt eine Folge $\sum(N-i)=\Theta(n^2)$ viele Inversionen.

Inversionen

- Die Anzahl der Schlüsselvergleiche und Datenbewegungen in InsertionSort hängt eng mit der Anzahl der Inversionen der Folge zusammen:

- Die Anzahl der Inversionen der Folge ist gleich $\sum_{k=2..n}(s_k-1)$.

3.1.2 Selection-Sort

Idee von „Sortieren durch Auswahl“:

- Bestimme Position $i_1 \in \{1,2,\ldots,n\}$ zu der das Element mit minimalem Schlüssel auftritt; vertausche $A[1]$ mit $A[i_1]$;
- Bestimme $i_2 \in \{2,\ldots,n\}$ …, vertausche A[2] mit $A[i_1]$; etc.

Beispiel: s. VO und Skript

SelectionSort(ref A)

Eingabe/Ausgabe: Zahlenfolge in Feld A[1..n]

```
(1) for j:=1,2,…,n-1 {
(2)     minpos:=j
(3)     for i:=j+1,…,n {
(4)       if A[i].key < A[minpos].key then
(5)         minpos:=i
(6)     }
(7)     if minpos > j then
(8)       Vertausche A[minpos] mit A[j]
(9)   }
```

Analyse von SelectionSort

- **Anzahl der Schlüsselvergleiche (Z. 4):**

  $C_{best}(n)=C_{avg}(n)=C_{worst}(n)=\Theta(n^2)$

denn:

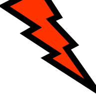
$$C_{best}(n) = \sum_{j=1}^{n-1}(n-j) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = \theta(n^2)$$

- **Anzahl der Datenbewegungen (Z. 8):**

  $M_{best}(n)=0$

  $M_{avg}(n)=M_{worst}(n)=\Theta(n)$

Eigenschaften von SelectionSort

- **Eigenschaften:**
  - in situ ?
  - adaptiv ?
  - stabil ? 

- **Einsatz von SelectionSort, wenn:**
  - Bewegungen von Datensätzen teuer
  - Vergleiche zwischen Schlüsseln billig

3.1.3 Merge-Sort

Idee folgt dem „Divide and Conquer"-Prinzip („Teile und Erobere"):

- **Teile** das Problem in Teilprobleme auf.
- **Erobere** die Teilprobleme durch rekursives Lösen. Wenn sie klein genug sind, löse sie direkt.
- **Kombiniere** die Lösungen der Teilprobleme zu einer Lösung des Gesamtproblems.

wichtiges Algorithmen-Entwurfsprinzip!

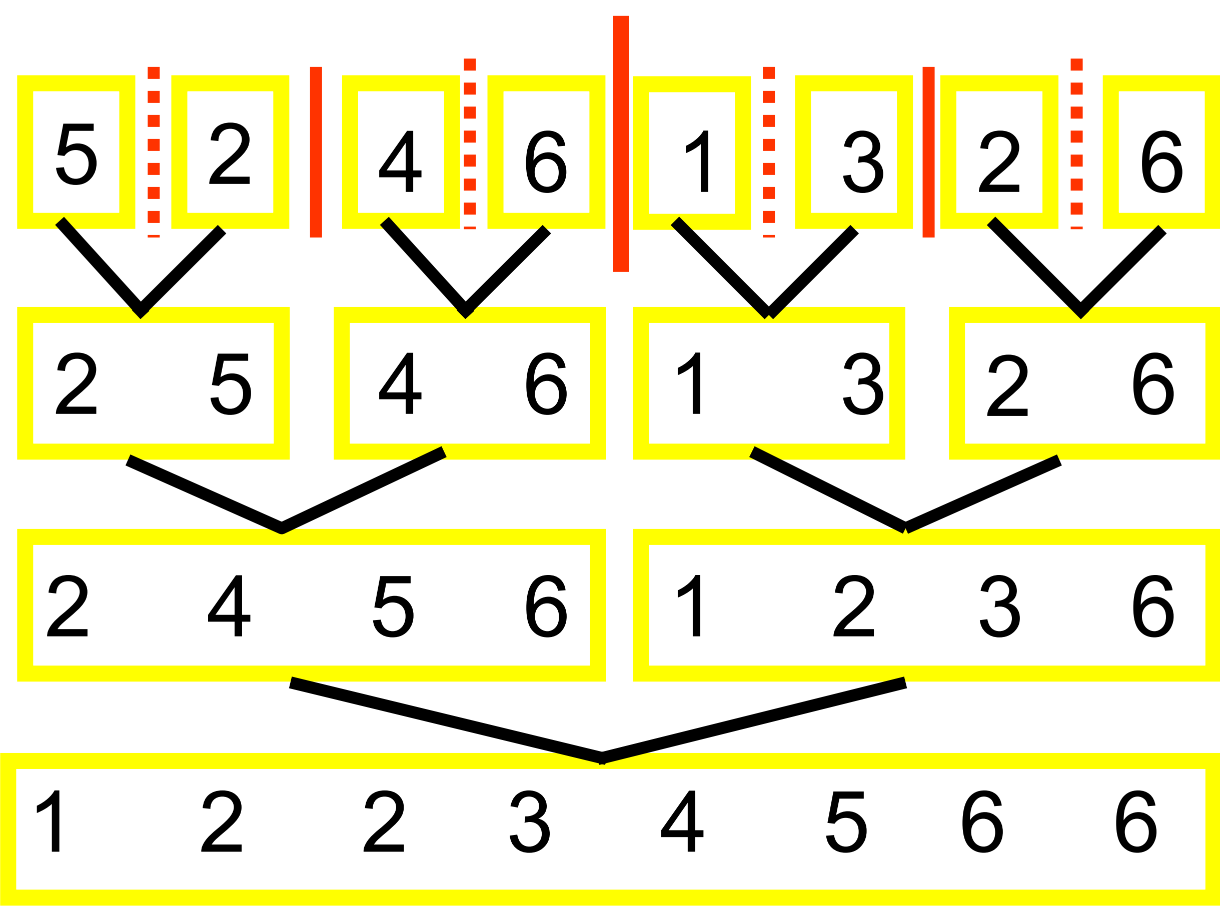
3.1.3 Merge-Sort

Idee von „Sortieren durch Mischen“:

- **Teile:** Teile die Folge in der Mitte in zwei Teilfolgen.
- **Erobere:** Sortiere beide Teilfolgen rekursiv. Für 1-elementige Teilfolgen ist nichts zu tun.
- **Kombiniere:** Verschmelze die sortierten Teilfolgen zu einer Gesamtfolge.

Merge Sort: älteste für den Computer entwickelte Sortieralgorithmus (John von Neumann 1945)

Ablauf von MergeSort



MergeSort(ref A,l,r)

```
procedure MergeSort(ref A,l,r)
(1)  var Index m
(2)  if l < r then {
(3)      m:=⌊(l+r)/2⌋
(4)      MergeSort(A,l,m)
(5)      MergeSort(A,m+1,r)
(6)      Merge(a,l,m,r)
(7)  }
```

Aufruf: MergeSort(A,1,n)

Merge(ref A,l,m,r)

```
procedure Merge(ref A,l,m,r)
(1)  i:=l; j:=m+1
(2)  for k:=1,…,r {
(3)     if (i>m) or ((j≤r) and (A[i].key>A[j].key]))
(4)          then
(5)        B[k]:=A[j]; j:=j+1
(6)    else
(7)        B[k]:=A[i]; i:=i+1
(8)  }
(9)  Schreibe sort. Folge zurück von B nach A
```

Rekursive Aufrufe unseres Beispiels

MergeSort(A,1,8)

MergeSort(A,1,4)

MergeSort(A,1,2)

MergeSort(A,1,1)

MergeSort(A,2,2)

Merge(A,1,1,2)

MergeSort(A,3,4)

MergeSort(A,3,3)

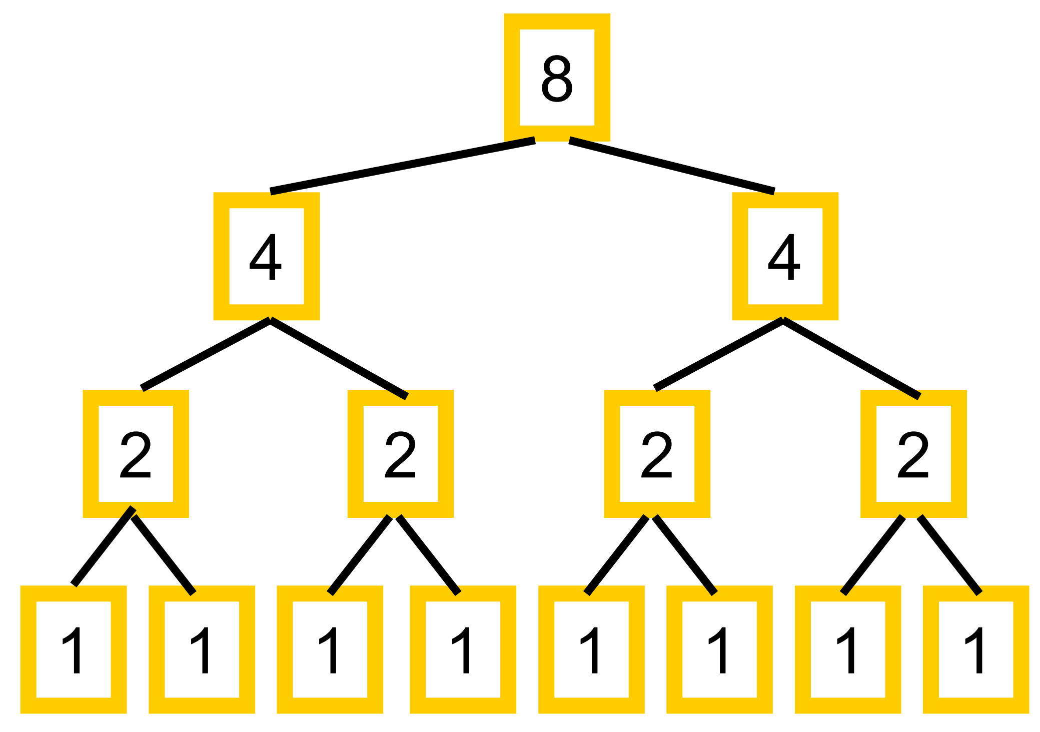
MergeSort(A,4,4)

Merge(A,3,3,4)

Merge(A,1,4,2) ….u.s.w.

Herleitung der Laufzeitfunktion

Sei $n=2^k$ für ein beliebiges k



Anzahl der Instanzen	Zeit pro Instanz	Gesamtzeit
1	8	8
2	4	8
4	2	8
8	1	8

Aufwand in jeder Stufe gleich $n=2^k$.

Es gibt $k+1$=$\log n + 1$ solcher Stufen

Gesamtaufwand:
$T(n) = n\,(1 + \log n) =$
$= n + n \log n = \Theta(n \log n)$