Kap. 3: Exakte Lösungsverfahren für NP-schwierige kombinatorische Optimierungsprobleme

3.4 Schnittebenenverfahren und Branch & Cut

6. VO 19. April 2007

Literatur für diese VO

- P.Mutzel: Skript-Teil: NP-schwierige kombinatorische Optimierungsprobleme (s. Web)

- Nachschlagewerk bei Interesse: M. Jünger und D. Naddef (Eds.): Computational Combinatorial Optimization, Optimal or Provably Near-Optimal Solutions, LNCS 2241, Springer, 2001, i.e. 157-223

2

Überblick Kap. 3

3.1 Einführung
- Kombinatorische Optimierungsprobleme
- Lineare Programmierung (Kurzeinführung)
- Polyedertheorie (Kurzeinführung)

3.2 Kombinatorische vs. Ganzzahlige Optimierung

3.3 Bsp: Das Lineare Ordnungsproblem

3.4 Exakte Verfahren für Ganzzahlige Optimierung
- Schnittebenenverfahren, Separationsproblem
- Branch-and-Cut

4. Bsp: Das Handlungsreisendenproblem (TSP)

3

3.2 Zusammenhang zu Kombinatorischer Optimierung

Jedes kombinatorische Optimierungsproblem kann als BLP formuliert werden und umgekehrt.

Für jedes kombinatorische Optimierungsproblem existiert eine Formulierung als LP.

Diese ist jedoch meist nicht bekannt.

4

Kombinatorische Optimierung vs. 0/1-IP

Gegeben ist kombinatorisches OP: (E,I,c)

Assoziiertes 0/1-IP:

$$P_F = \text{conv}\{\chi^F \in \{0,1\}^E \mid F \in I\}$$
$$\max\{c^T x \mid x \in P_F\}$$

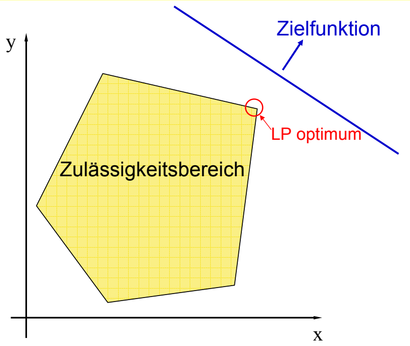
P_F ist ein Polyeder und besitzt somit eine LP-Beschreibung

Wir können also jedes komb. OP als LP formulieren

Probleme:
- Berechnung der LP-Darstellung nicht in pol.- Zeit möglich
- i.A. exponentiell viele Ungleichungen
- Ungleichungen besitzen Koeffizienten exponentieller Größe

5

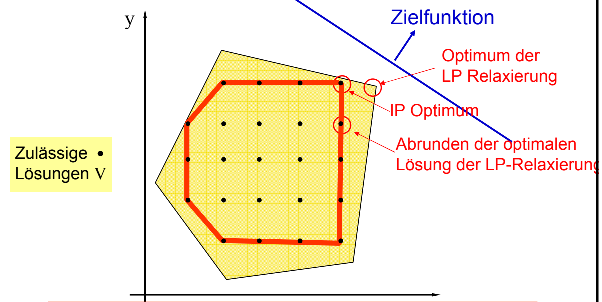
Lösungsraum (Polyeder) definiert durch die Constraints der LP-Formulierung



Lineares Programm (LP)

6

Lösungsraum definiert durch die Constraints der GLP-Formulierung
LP-Relaxierung liefert Polyeder als Lösungsraum, der alle Lösungen umfasst

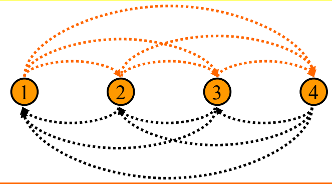


Constraints (i.A. unbekannt) der LP-Formulierung von conv(V)

Ganzzahliges Lineares Programm (GLP)

3.3 Lineares Ordnungsproblem (LOP)

Gegeben: ein vollständiger gerichteter Graph $G=(V,A)$ mit Kantengewichten c_{uv} für alle Bögen (u,v) in A.

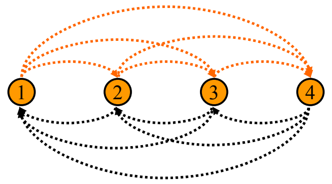


Gesucht: eine lineare Ordnung der Knoten, so dass die Summe der Gewichte aller Bögen, die dieser Ordnung entsprechen, maximiert wird.

Anwendungen: Triangulation von Input-Output Matrizen, Rangbestimmung in Turniersportarten, Graph Layout

Graphen-Theoretische Formulierung

Gegeben: ein vollständiger gerichteter Graph $G=(V,A)$ mit Kantengewichten c_{uv} für alle Bögen (u,v) in A.



Gesucht: ein spannendes, azyklisches Turnier in G mit größtem Gewicht

Turnier: $T \subseteq A$: entweder $(i,j) \in T$ oder $(j,i) \in T$ aber nicht beide

$$\max \sum_{u \neq v} c_{uv} x_{uv}$$
$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall u < v$$
$$0 \leq x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1 \quad \forall u < v < w$$
x_{uv} ~~ganzzahlig~~ LP-Relaxierung des IPs

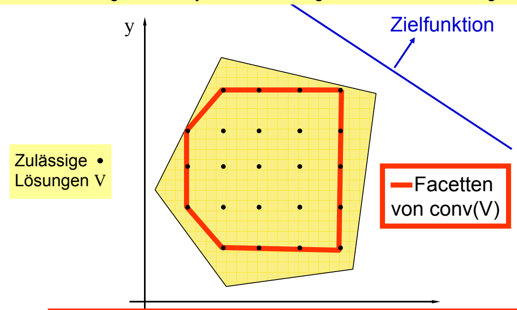
- n<6: Entfernung der Ganzzahligkeitsbedingungen macht keinen Unterschied
- D.h. die Ecken des relaxierten LOP-Polytops sind alle ganzzahlig
- n>=6: zusätzliche Ungleichungen notwendig

Suche nach zusätzlichen Ungleichungen der LP-Beschreibung von $P=\text{conv}(V)$

idealerweise: facetten-definierende Ungleichungen

(die dazugehörige Hyperebene def. eine Facette von P)

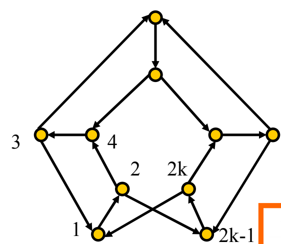
Lösungsraum definiert durch die Constraints der GLP-Formulierung
LP-Relaxierung liefert Polyeder als Lösungsraum, der alle Lösungen umfasst



Constraints (i.A. unbekannt) der LP-Formulierung von conv(V)

Ganzzahliges Lineares Programm (GLP)

Beispiel: Möbius-Leiter Ungleichungen:



Allgemein:
k Kreise, k ungerade

Es ist notwendig, mindestens Bögen zu entfernen, um G azyklisch zu machen

$$\sum_{uv \in E} x_{uv} \leq |E| - (k+1)/2$$

Möbius-Ungleichungen beschreiben Facetten des LOP-Polytops

Foschungsgebiet: Polyedrische Kombinatorik

Polyedrische Kombinatorik: LOP

Konvexe Hülle aller charakteristischer Vektoren, die Permutationen von l Elementen beschreiben.

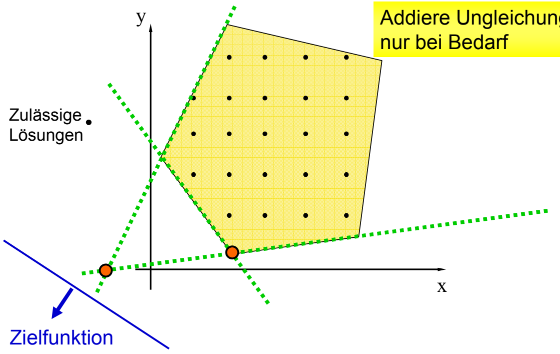
l	n
3	8
4	20
5	40
6	910
7	87,472
8	>488,602,996

Anzahl der Facetten, d.h. die Anzahl der theoretisch notwendigen Linearen Ungleichungen

For l=60 ist LOP exakt lösbar innerhalb 1 Sekunde mittels Schnittebenenverfahren.

13

3.4 Schnittebenenverfahren und Branch & Cut



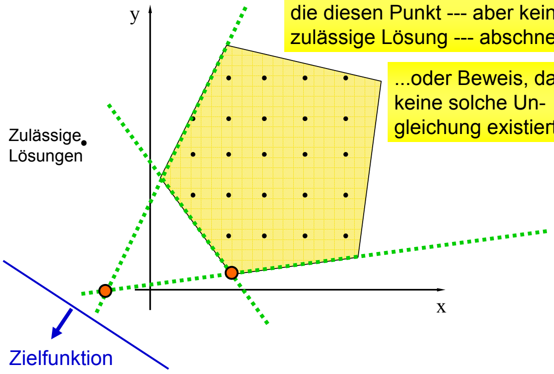
Addiere Ungleichungen nur bei Bedarf

14

Separationsproblem

Gegeben ist ein Punkt x und OP. Gesucht ist eine Ungleichung, die diesen Punkt --- aber keine zulässige Lösung --- abscheidet.

...oder Beweis, dass keine solche Ungleichung existiert.



15

Idee von Schnittebenenverfahren

(1) Starte mit einer Teilmenge der Restriktionen

(2) Löse LP, sei x* die gefundene Optimallösung

(3) Entscheide, ob es weggelassene Restriktionen $a^T x <= b_0$ gibt, so dass $a^T x > b_0$?

(3.1) Falls NEIN: STOP (Relaxierung gelöst)

(3.2) Falls JA: Bestimme solche, füge sie zu LP hinzu und gehe zu (1)

Separationsproblem

16

Definition Separationsproblem

Gegeben ist ein Punkt $\bar{x} \in R^E$ und ein Polytop P.
Bestimme, ob $\bar{x} \in P$, und falls $\bar{x} \notin P$, finde eine Restriktion $a^T x \leq b_0$, die für alle Punkte $x \in P$ gültig ist, jedoch für den Punkt $\bar{x}$ verletzt ist.

D.h. für alle Punkte $x \in P$ muß gelten $a^T x \leq b_0$ und für $\bar{x}$ muß gelten $a^T \bar{x} > b_0$

17

Satz von Grötschel, Lovasz, Schrijver

Das Optimierungsproblem ist in polynomieller Zeit lösbar genau dann wenn das zugehörige Separationsproblem in polynomieller Zeit lösbar ist.

Frage: Können wir Separationsproblem für 3-Kreis Ungleichungen für LOP lösen?

JA: durch Aufzählen und Ausprobieren aller Ungleichungen

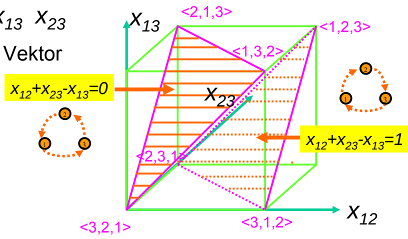
18

Geometrische Interpretation LOP

$$\max \sum_{u \neq v} c_{uv} x_{uv}$$
$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall u < v$$
$$0 \leq x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1 \quad \forall u < v < w$$
$$x_{uv} \text{ ganzzahlig}$$

Beispiel n=3: x_{12} x_{13} x_{23}

Permutation	charakt. Vektor
<1,2,3>	(1,1,1)
<2,1,3>	(0,1,1)
<2,3,1>	(0,0,1)
<1,3,2>	(1,1,0)
<3,1,2>	(1,0,0)
<3,2,1>	(0,0,0)



Beispiel: Acyclic Subgraph

Problem: Finde größten azyklischen Untergraphen in gewichtetem Digraphen D=(V,A) mit Gewichten d:A→N

$$\max \sum_{uv \in A} d_{uv} x_{uv}$$
$$\sum_{uv \in C} x_{uv} \leq |C| - 1 \quad \forall \text{ Kreise } C$$
$$x_{uv} \in \{0,1\}$$

Problem: LP-Relaxierung besitzt exponentiell viele Ungleichungen

Lösung der LP-Relaxierung: durch Separierung

Satz von Grötschel, Lovasz, Schrijver

Das Optimierungsproblem ist in polynomieller Zeit lösbar genau dann wenn das zugehörige Separationsproblem in polynomieller Zeit lösbar ist.

Frage: Können wir das Separationsproblem für das Acylic Subgraph Problem lösen?

JA: durch Kürzeste Wegeprobleme

Beispiel: Acyclic Subgraph

$$\max \sum_{uv \in A} c_{uv} x_{uv}$$
$$\sum_{uv \in C} x_{uv} \leq |C| - 1 \quad \forall \text{ Kreise } C$$
$$x_{uv} \in \{0,1\}$$

$$\sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 \Leftrightarrow \sum_{e \in C} (1 - x_e) \geq 1$$

- Für alle Kanten $f \in A$ tue:
  - Fixiere diese Kante $f = (u,v)$
  - Berechne kürzesten Weg in D mit Gewichten $1-x_e$
  - Falls Weglänge $W+(1-x_{uv})<1$, dann: verletzte Ungleichung gefunden, die nun zum System hinzugenommen wird
  - Sonst: Beweis, dass keine verletzte Ungleichung, die f enthält, existiert.

Branch-and-Cut Verfahren

Verbindung von Schnittebenenverfahren mit Branch-and-Bound

Versuche, jeweils die Teilprobleme (LP-Relaxierungen) mittels Schnittebenenverfahren zu lösen

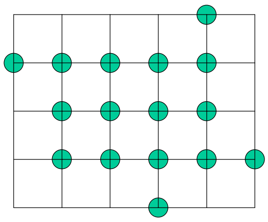
Falls die Lösung nicht ganzzahlig ist, dann wähle nicht-ganzzahlige Variable und generiere zwei neue Teilprobleme:

P1 mit zusätzlichen Restriktionen $x_e=0$
P2 mit zusätzlichen Restriktionen $x_e=1$

Branch & Cut (Grundidee)

- Identifiziere die zulässigen Lösungen mit 0/1-Vektoren
- Beschreibe die konvexe Hülle dieser Vektoren möglichst gut durch lineare Ungleichungen

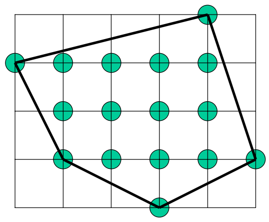
Branch & Cut (Grundidee)



Menge der zulässigen Lösungen

25

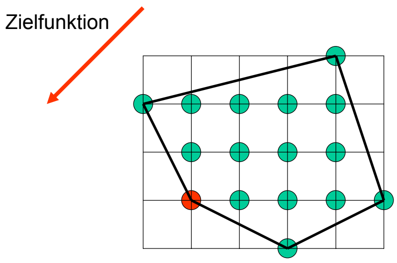
Branch & Cut (Grundidee)



Konvexe Hülle über diese Menge

26

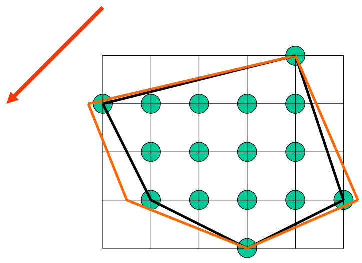
Branch & Cut (Grundidee)



Die Beschreibung der konvexen Hülle durch lineare Un-/gleichungen ist i.A. nicht bekannt.

28

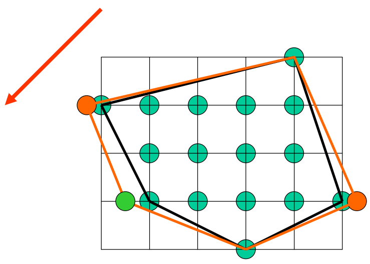
Branch & Cut (Grundidee)



Lösung: stattdessen Relaxierung der GLP-Formulierung

29

Branch & Cut (Grundidee)



Lösungspunkt über die LP-Relaxierung ist aber nicht zulässig für unser Originalproblem

31

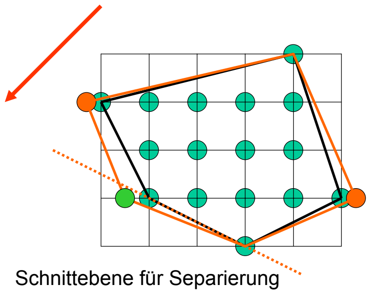
Branch & Cut (Grundidee)

- Identifiziere die zulässigen Lösungen mit 0/1-Vektoren
- Beschreibe die konvexe Hülle dieser Vektoren möglichst gut durch lineare Ungleichungen
- Finde möglichst gute Algorithmen, die für einen gegebenen Punkt von diesem verletzte Ungleichungen finden bzw. feststellen, dass keine solchen existieren.

→ **Separierung**

32

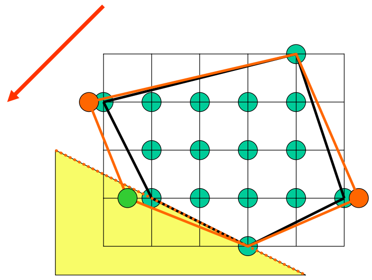
Branch & Cut (Grundidee)



Schnittebene für Separierung

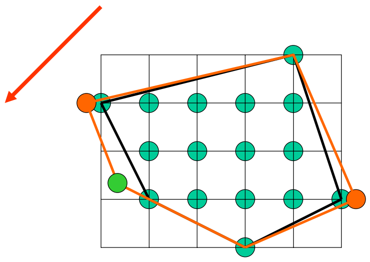
34

Branch & Cut (Grundidee)



35

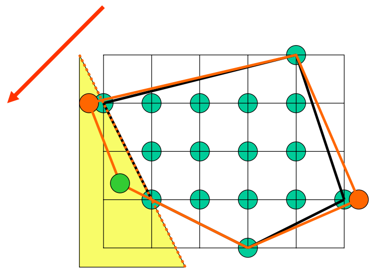
Branch & Cut (Grundidee)



neuer Lösungspunkt der LP-Relaxierung

37

Branch & Cut (Grundidee)

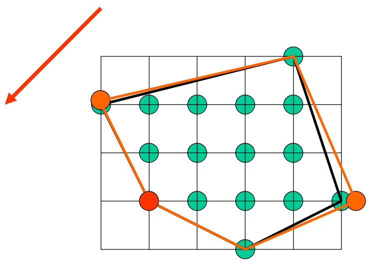


Hinzufügen einer Schnittebene: „schneidet den Punkt weg“

39

Branch & Cut (Grundidee)

Schnittebenenverfahren (Cutting Plane Method)



neuer Lösungspunkt der LP-Relaxierung
→ zulässig und damit optimal

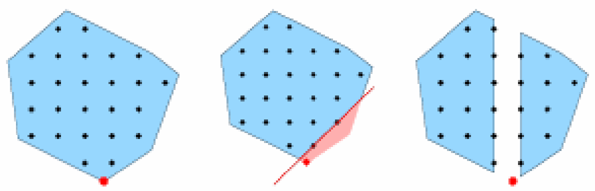
41

Und wenn man gar keine Schnittebenen mehr findet aber nicht ganzzahlig (bzw. optimal) ist?

→ Branch

42

Branch & Cut (Grundidee)



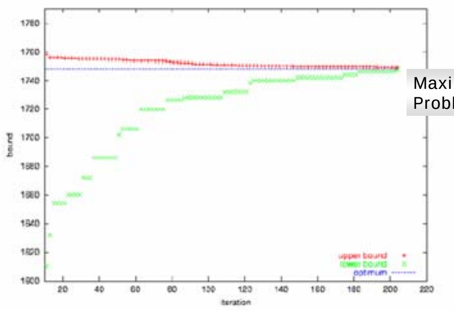
Bound Cut Branch

Branch & Cut (Grundidee)

Separierungs-
problem

- Löse Relaxierungen mit Schnittebenenverfahren.
  → **Cut**
- Verzweige, wenn keine Schnittebenen gefunden wird, aber die Lösung nicht ganzzahlig ist.
  → **Branch**
- Finde gute zulässige Lösungen basierend auf fraktionellen Lösungen. → **Exploit**
- Schneide nichtprofitable Teilbäume weg.
  → **Bound**

Eine typische B&C Berechnung



Maximierungs
Problem

Nächstes Mal: Beispiel TSP