Kap. 3: Exakte Lösungsverfahren für NP-schwierige kombinatorische Optimierungsprobleme

3.4 Schnittebenenverfahren und Branch & Cut

6. VO 19. April 2007

Literatur für diese VO

- P.Mutzel: Skript-Teil: NP-schwierige kombinatorische Optimierungsprobleme (s. Web)

- Nachschlagewerk bei Interesse: M. Jünger und D. Naddef (Eds.): Computational Combinatorial Optimization, Optimal or Provably Near-Optimal Solutions, LNCS 2241, Springer, 2001, i.e. 157-223

Überblick Kap. 3

3.1 Einführung
- Kombinatorische Optimierungsprobleme
- Lineare Programmierung (Kurzeinführung)
- Polyedertheorie (Kurzeinführung)

3.2 Kombinatorische vs. Ganzzahlige Optimierung

3.3 Bsp: Das Lineare Ordnungsproblem

3.4 Exakte Verfahren für Ganzzahlige Optimierung
- Schnittebenenverfahren, Separationsproblem
- Branch-and-Cut

4. Bsp: Das Handlungsreisendenproblem (TSP)

3.2 Zusammenhang zu Kombinatorischer Optimierung

Jedes kombinatorische Optimierungsproblem kann als BLP formuliert werden und umgekehrt.

Für jedes kombinatorische Optimierungsproblem existiert eine Formulierung als LP.

Diese ist jedoch meist nicht bekannt.

Kombinatorische Optimierung vs. 0/1-IP

Gegeben ist kombinatorisches OP: $\boxed{(E,I,c)}$

Assoziiertes 0/1-IP:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_F = \mathrm{conv}\{\chi^F \in \{0,1\}^E \mid F \in I\} \\ \max\{c^T x \mid x \in P_F\} \end{array}}$$

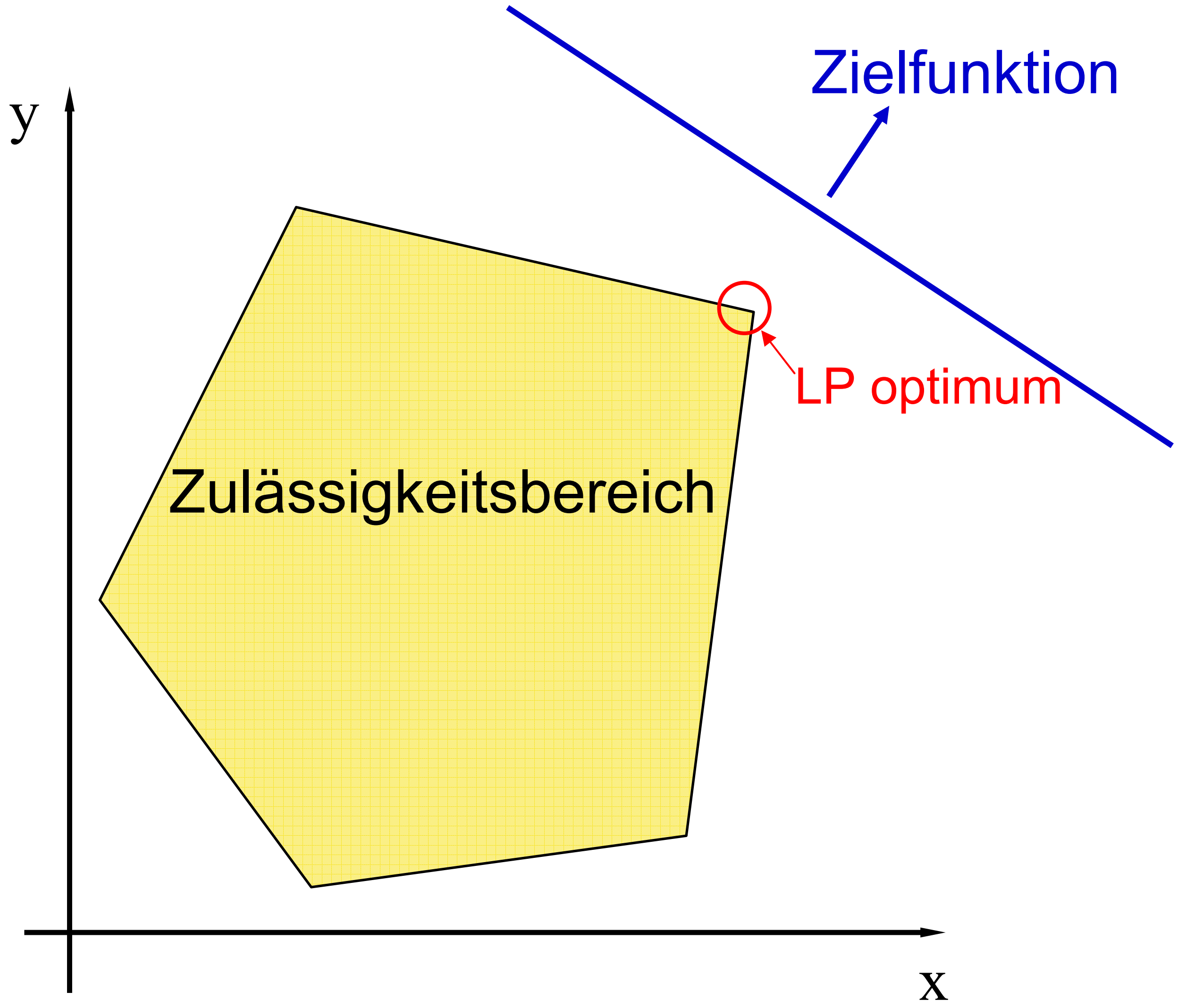
P_F ist ein Polyeder und besitzt somit eine LP-Beschreibung

Wir können also jedes komb. OP als LP formulieren

Probleme:

- Berechnung der LP-Darstellung nicht in pol.- Zeit möglich
- i.A. exponentiell viele Ungleichungen
- Ungleichungen besitzen Koeffizienten exponentieller Größe

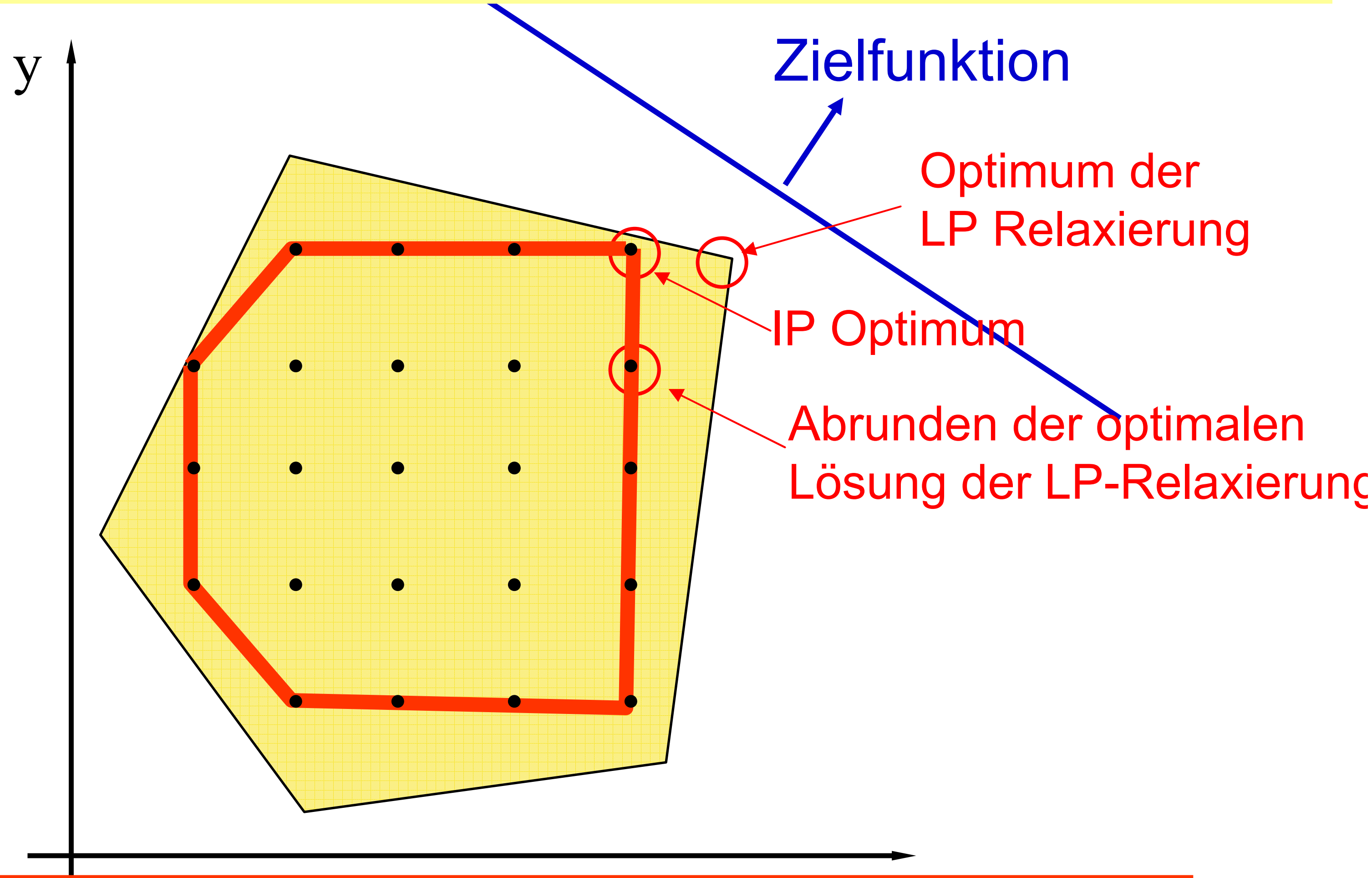
Lösungsraum (Polyeder) definiert durch die Constraints der LP-Formulierung



Lineares Programm (LP)

Lösungsraum definiert durch die Constraints der GLP-Formulierung
LP-Relaxierung liefert Polyeder als Lösungsraum, der alle Lösungen umfasst

Zulässige •
Lösungen V

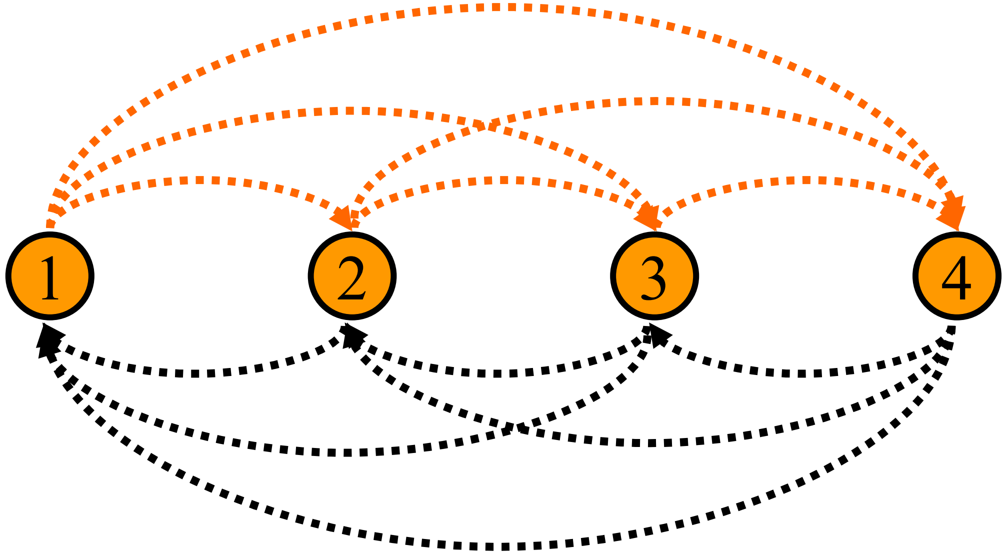


Constraints (i.A. unbekannt) der LP-Formulierung von conv(V)

Ganzzahliges Lineares Programm (GLP)

3.3 Lineares Ordnungsproblem (LOP)

Gegeben: ein vollständiger gerichteter Graph $G=(V,A)$ mit Kantengewichten c_{uv} für alle Bögen (u,v) in A.

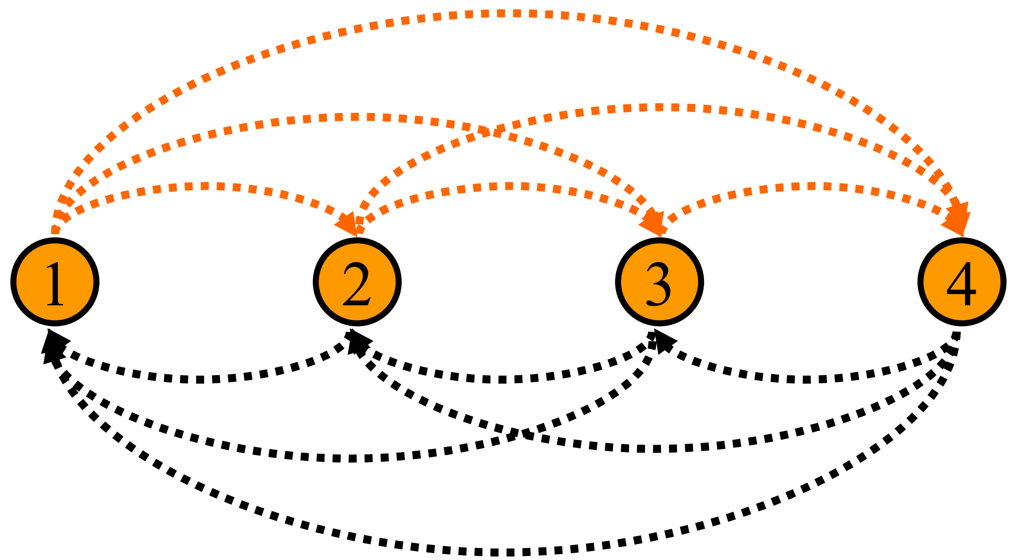


Gesucht: eine lineare Ordnung der Knoten, so dass die Summe der Gewichte aller Bögen, die dieser Ordnung entsprechen, maximiert wird.

Anwendungen: Triangulation von Input-Output Matrizen, Rangbestimmung in Turniersportarten, Graph Layout

Graphen-Theoretische Formulierung

Gegeben: ein vollständiger gerichteter Graph $G=(V,A)$ mit Kantengewichten c_{uv} für alle Bögen (u,v) in A.



Gesucht: ein spannendes, azyklisches Turnier in G mit größtem Gewicht

Turnier: $T \subseteq A$: entweder $(i,j) \in T$ oder $(j,i) \in T$ aber nicht beide

$$\max \sum_{u \neq v} c_{uv} x_{uv}$$

$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \qquad \forall u < v$$

$$0 \leq x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1 \quad \forall u < v < w$$

x_{uv} ~~ganzzahlig~~

LP-Relaxierung des IPs

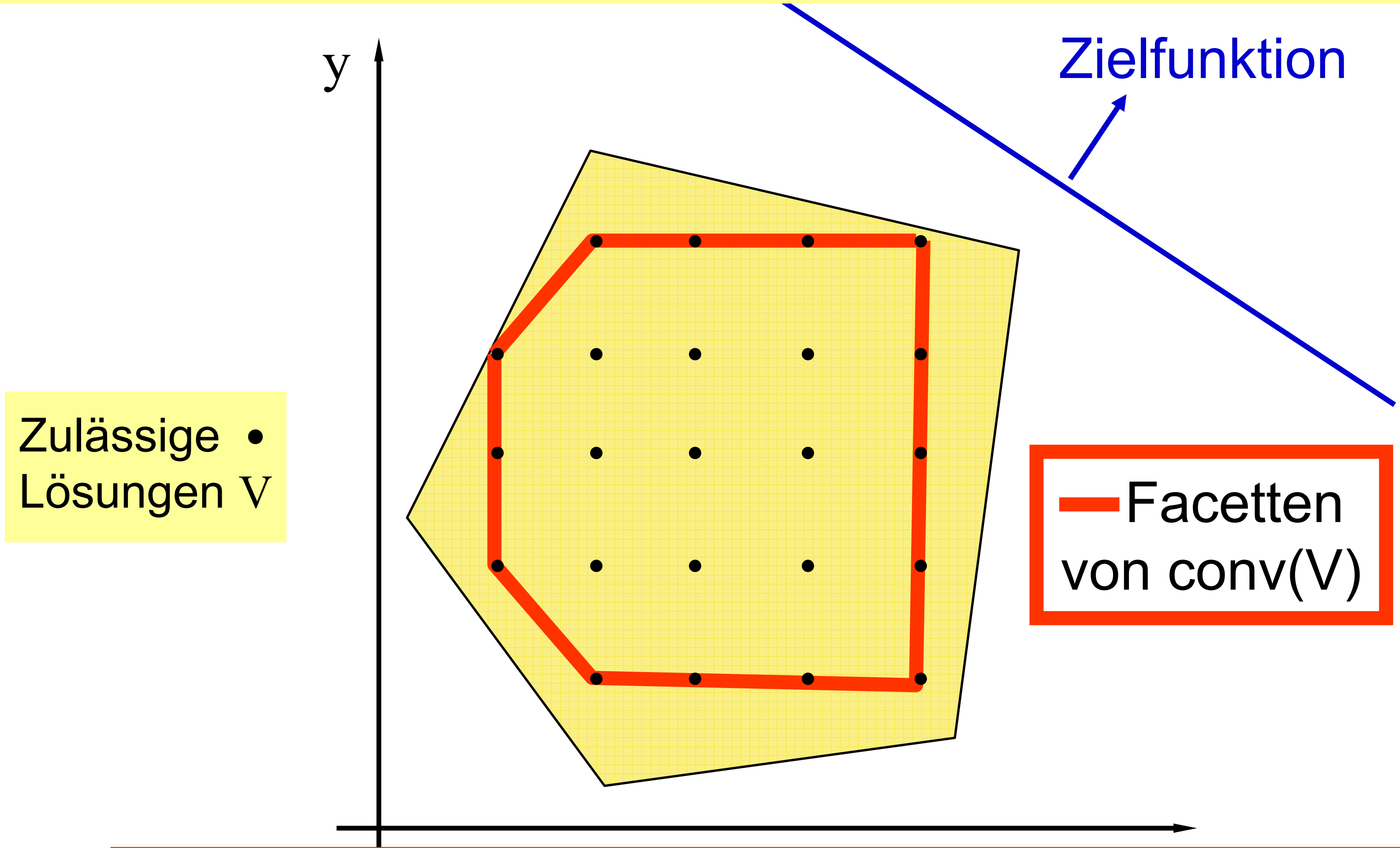
- n<6: Entfernung der Ganzzahligkeitsbedingungen macht keinen Unterschied
- D.h. die Ecken des relaxierten LOP-Polytops sind alle ganzzahlig
- n>=6: zusätzliche Ungleichungen notwendig

Suche nach zusätzlichen Ungleichungen der LP-Beschreibung von P=conv(V)

idealerweise: facetten-definierende Ungleichungen

(die dazugehörige Hyperebene def. eine Facette von P)

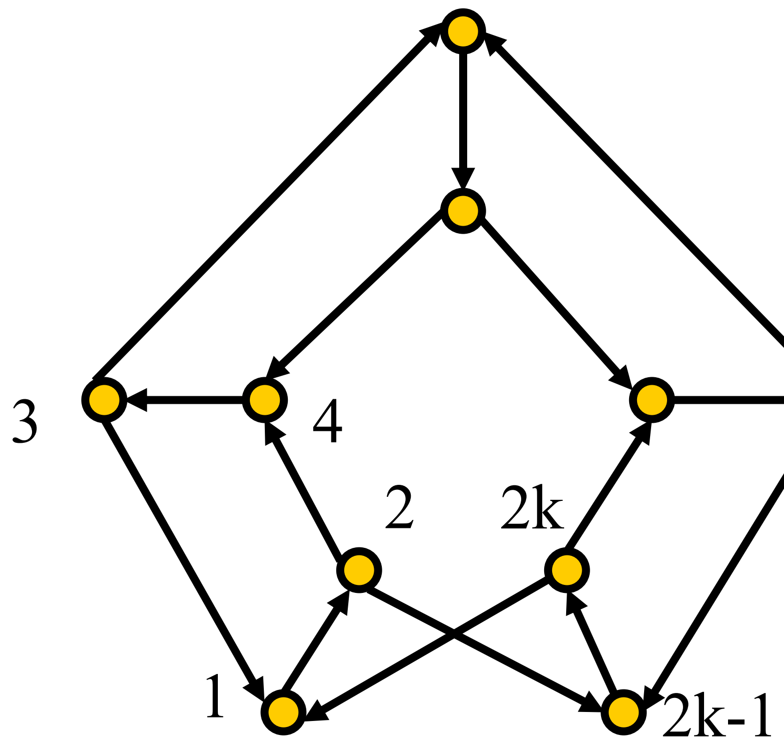
Lösungsraum definiert durch die Constraints der GLP-Formulierung
LP-Relaxierung liefert Polyeder als Lösungsraum, der alle Lösungen umfasst



Constraints (i.A. unbekannt) der LP-Formulierung von conv(V)

Ganzzahliges Lineares Programm (GLP)

Beispiel: Möbius-Leiter Ungleichungen:



Allgemein:
k Kreise, k ungerade

Es ist notwendig, mindestens Bögen zu entfernen, um G azyklisch zu machen

$$\boxed{\sum_{uv \in E} x_{uv} \leq |E| - (k+1)/2}$$

Möbius-Ungleichungen beschreiben Facetten des LOP-Polytops

Foschungsgebiet: Polyedrische Kombinatorik

Polyedrische Kombinatorik: LOP

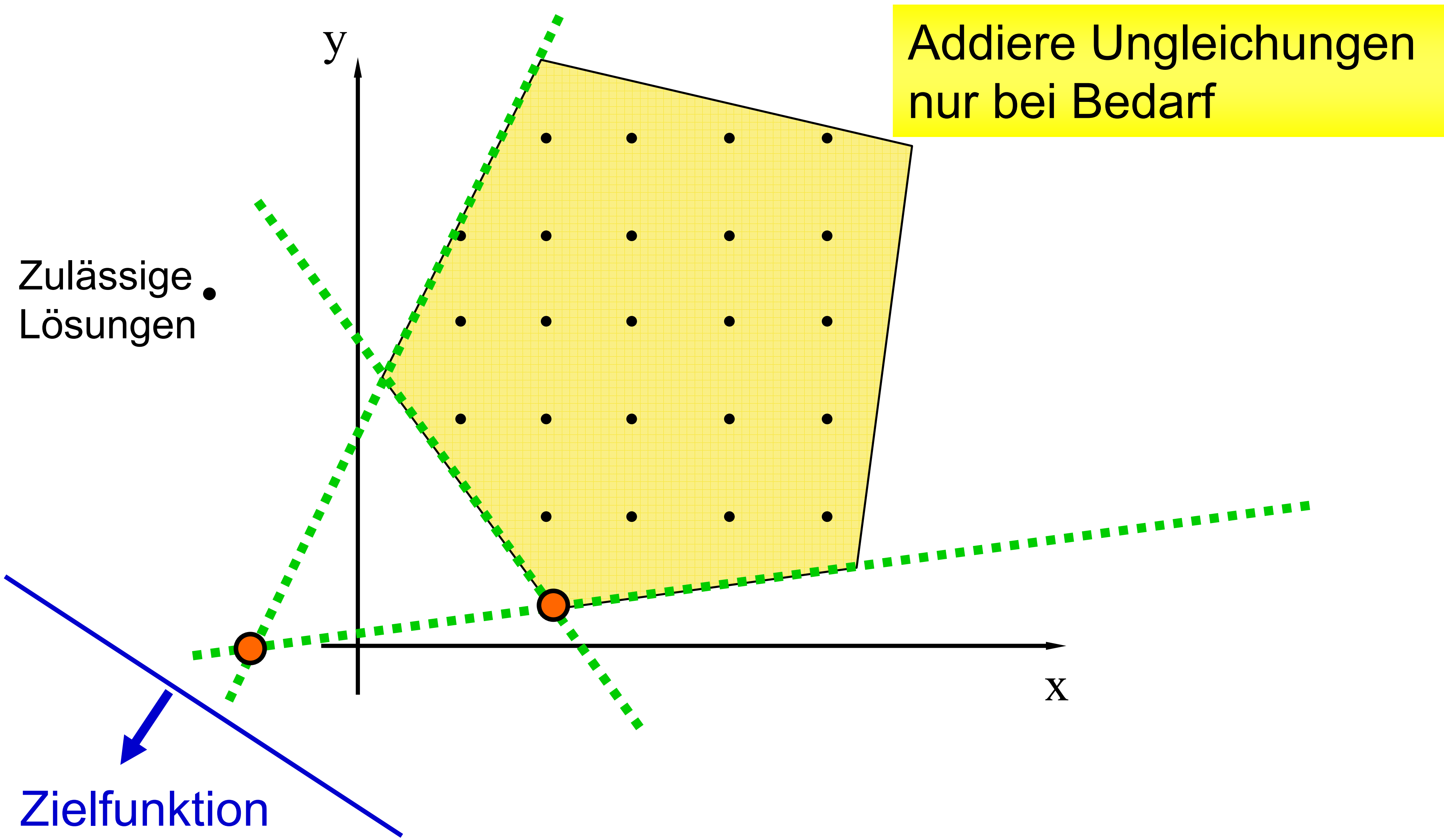
Konvexe Hülle aller charakteristischer Vektoren, die Permutationen von l Elementen beschreiben.

l	n
3	8
4	20
5	40
6	910
7	87,472
8	>488,602,996

Anzahl der Facetten, d.h. die Anzahl der theoretisch notwendigen Linearen Ungleichungen

For l=60 ist LOP exakt lösbar innerhalb 1 Sekunde mittels Schnittebenenverfahren.

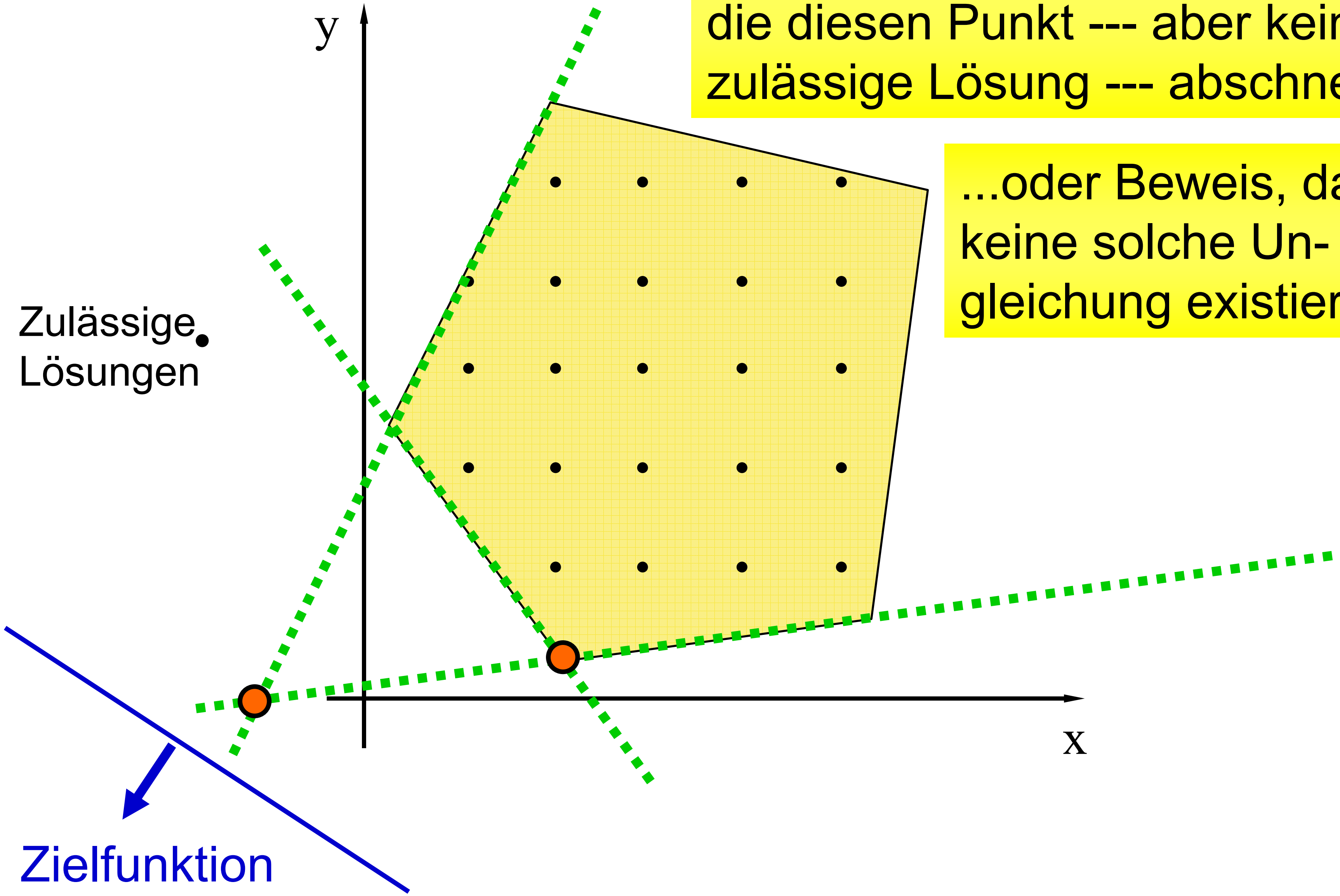
3.4 Schnittebenenverfahren und Branch & Cut



Separationsproblem

Gegeben ist ein Punkt x und OP.
Gesucht ist eine Ungleichung,
die diesen Punkt --- aber keine
zulässige Lösung --- abschneidet.

...oder Beweis, dass
keine solche Un-
gleichung existiert.



Idee von Schnittebenenverfahren

(1) Starte mit einer Teilmenge der Restriktionen

(2) Löse LP, sei x* die gefundene Optimallösung

(3) Entscheide, ob es weggelassene Restriktionen $a^T x <= b_0$ gibt, so dass $a^T x > b_0$?

(3.1) Falls NEIN: STOP (Relaxierung gelöst)

(3.2) Falls JA: Bestimme solche, füge sie zu LP hinzu und gehe zu (1)

Separationsproblem

Definition Separationsproblem

Gegeben ist ein Punkt $\bar{x} \in R^E$ und ein Polytop P.
Bestimme, ob $\bar{x} \in P$, und falls $\bar{x} \notin P$, finde eine Restriktion $a^T x \leq b_0$, die für alle Punkte $x \in P$ gültig ist, jedoch für den Punkt $\bar{x}$ verletzt ist.

D.h. für alle Punkte $x \in P$ muß gelten $a^T x \leq b_0$ und für $\bar{x}$ muß gelten $a^T \bar{x} > b_0$

Satz von Grötschel, Lovasz, Schrijver

Das Optimierungsproblem ist in polynomieller Zeit lösbar genau dann wenn das zugehörige Separationsproblem in polynomieller Zeit lösbar ist.

Frage: Können wir Separationsproblem für 3-Kreis Ungleichungen für LOP lösen?

JA: durch Aufzählen und Ausprobieren aller Ungleichungen

Geometrische Interpretation LOP

$$\max \sum_{u \neq v} c_{uv} x_{uv}$$

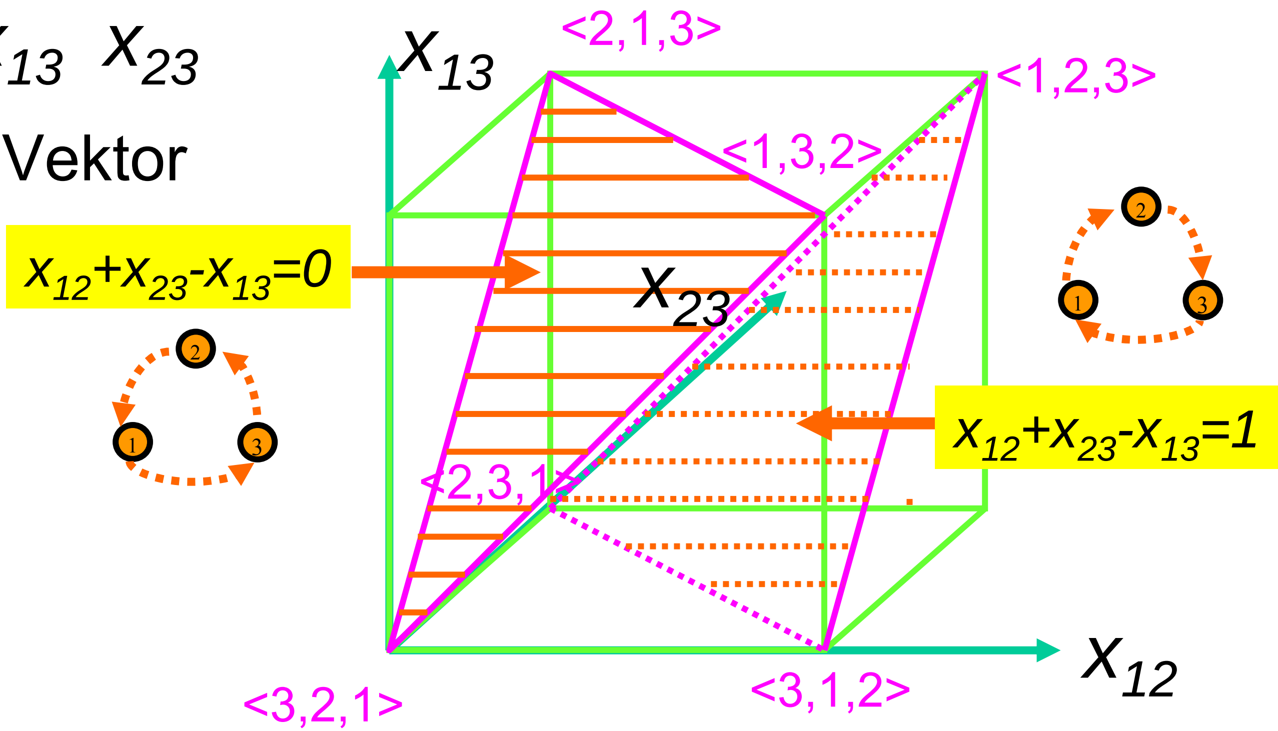
$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \qquad \forall u < v$$

$$0 \leq x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1 \quad \forall u < v < w$$

$$x_{uv} \text{ ganzzahlig}$$

Beispiel n=3: x_{12} x_{13} x_{23}

Permutation	charakt. Vektor
<1,2,3>	(1,1,1)
<2,1,3>	(0,1,1)
<2,3,1>	(0,0,1)
<1,3,2>	(1,1,0)
<3,1,2>	(1,0,0)
<3,2,1>	(0,0,0)



Beispiel: Acyclic Subgraph

Problem: Finde größten azyklischen Untergraphen in gewichtetem Digraphen D=(V,A) mit Gewichten d:A→N

$$
\begin{aligned}
\max \sum_{uv \in A} d_{uv} x_{uv} & & & \\
\sum_{uv \in C} x_{uv} & \leq |C| - 1 & & \forall \text{ Kreise } C \\
x_{uv} & \in \{0, 1\} & &
\end{aligned}
$$

Problem: LP-Relaxierung besitzt exponentiell viele Ungleichungen

Lösung der LP-Relaxierung: durch Separierung

Satz von Grötschel, Lovasz, Schrijver

Das Optimierungsproblem ist in polynomieller Zeit lösbar genau dann wenn das zugehörige Separationsproblem in polynomieller Zeit lösbar ist.

Frage: Können wir das Separationsproblem für das Acylic Subgraph Problem lösen?

JA: durch Kürzeste Wegeprobleme

Beispiel: Acyclic Subgraph

$$\max \sum_{uv \in A} c_{uv} x_{uv}$$

$$\sum_{uv \in C} x_{uv} \leq |C| - 1 \quad \forall \text{ Kreise } C$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\}$$

$$\sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 \Leftrightarrow \sum_{e \in C} (1 - x_e) \geq 1$$

- Für alle Kanten $f \in A$ tue:
  - Fixiere diese Kante $f = (u,v)$
  - Berechne kürzesten Weg in D mit Gewichten $1\text{-}x_e$
  - Falls Weglänge $W+(1\text{-}x_{uv})<1$, dann: verletzte Ungleichung gefunden, die nun zum System hinzugenommen wird
  - Sonst: Beweis, dass keine verletzte Ungleichung, die f enthält, existiert.

Branch-and-Cut Verfahren

Verbindung von Schnittebenenverfahren
mit Branch-and-Bound

Versuche, jeweils die Teilprobleme (LP-Relaxierungen) mittels Schnittebenenverfahren zu lösen

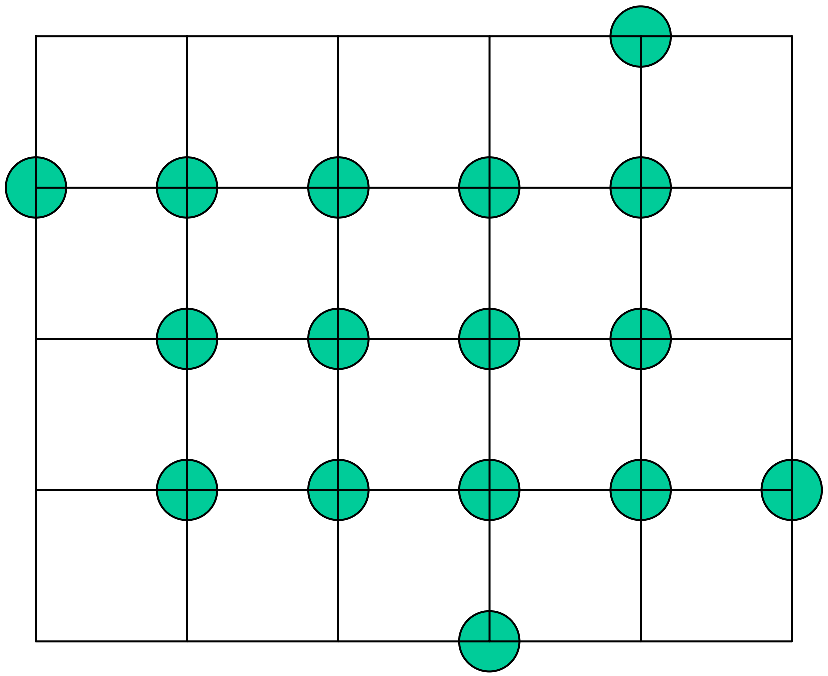
Falls die Lösung nicht ganzzahlig ist, dann wähle nicht-ganzzahlige Variable und generiere zwei neue Teilprobleme:

P1 mit zusätzlichen Restriktionen $x_e=0$
P2 mit zusätzlichen Restriktionen $x_e=1$

Branch & Cut (Grundidee)

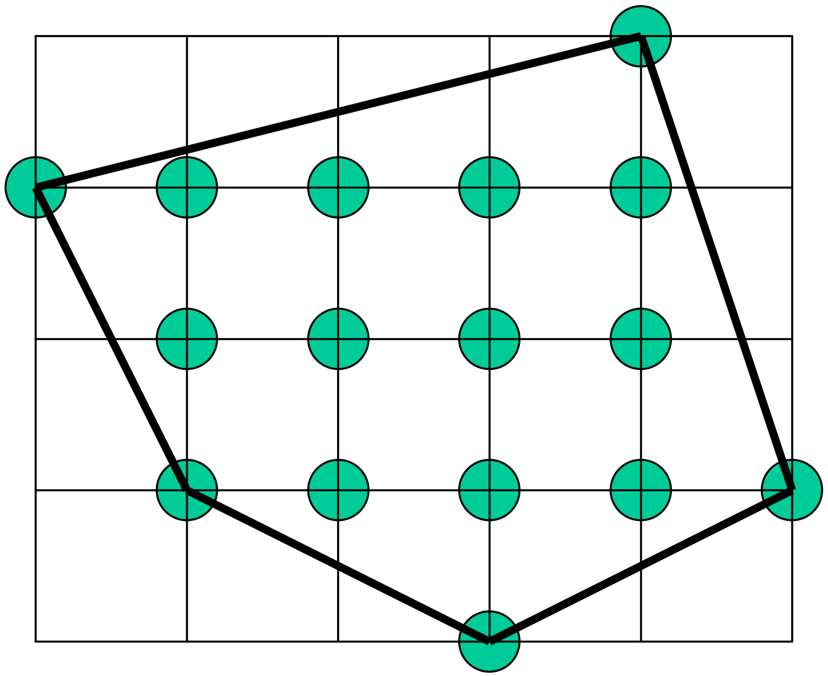
- Identifiziere die zulässigen Lösungen mit 0/1-Vektoren
- Beschreibe die konvexe Hülle dieser Vektoren möglichst gut durch lineare Ungleichungen

Branch & Cut (Grundidee)



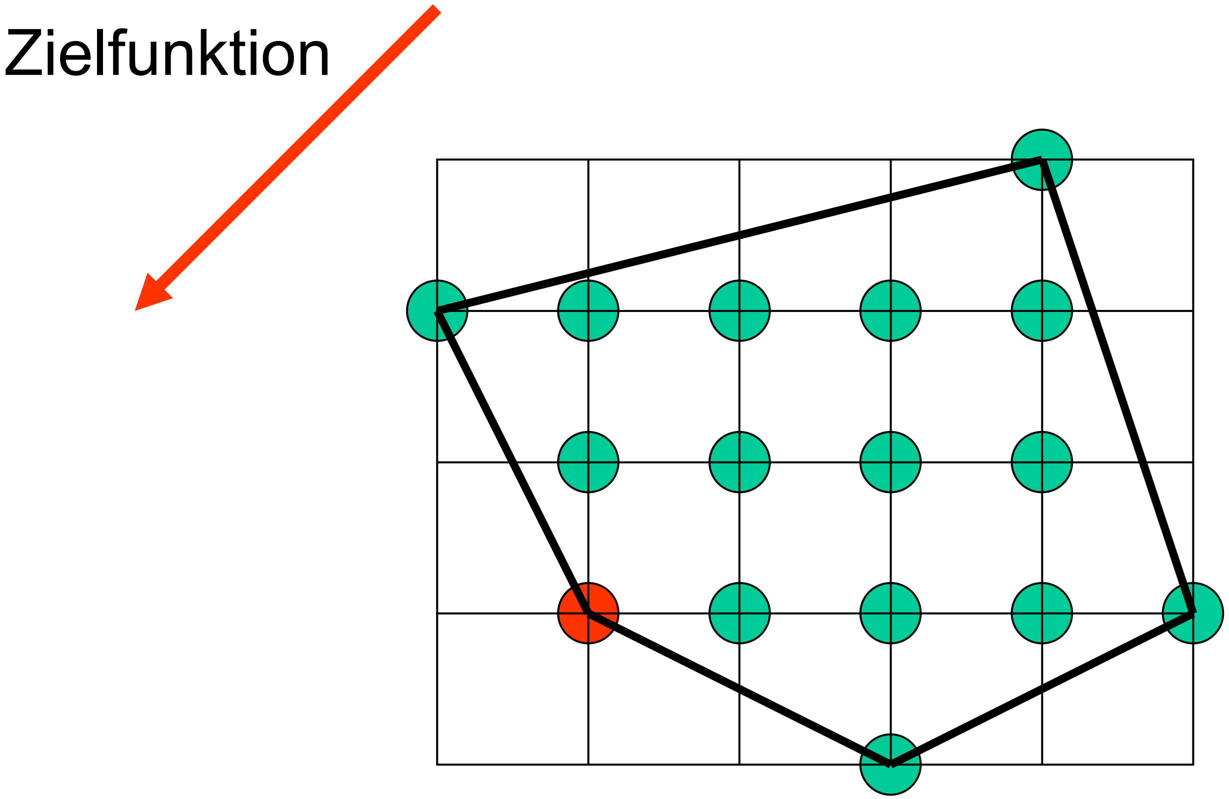
Menge der zulässigen Lösungen

Branch & Cut (Grundidee)



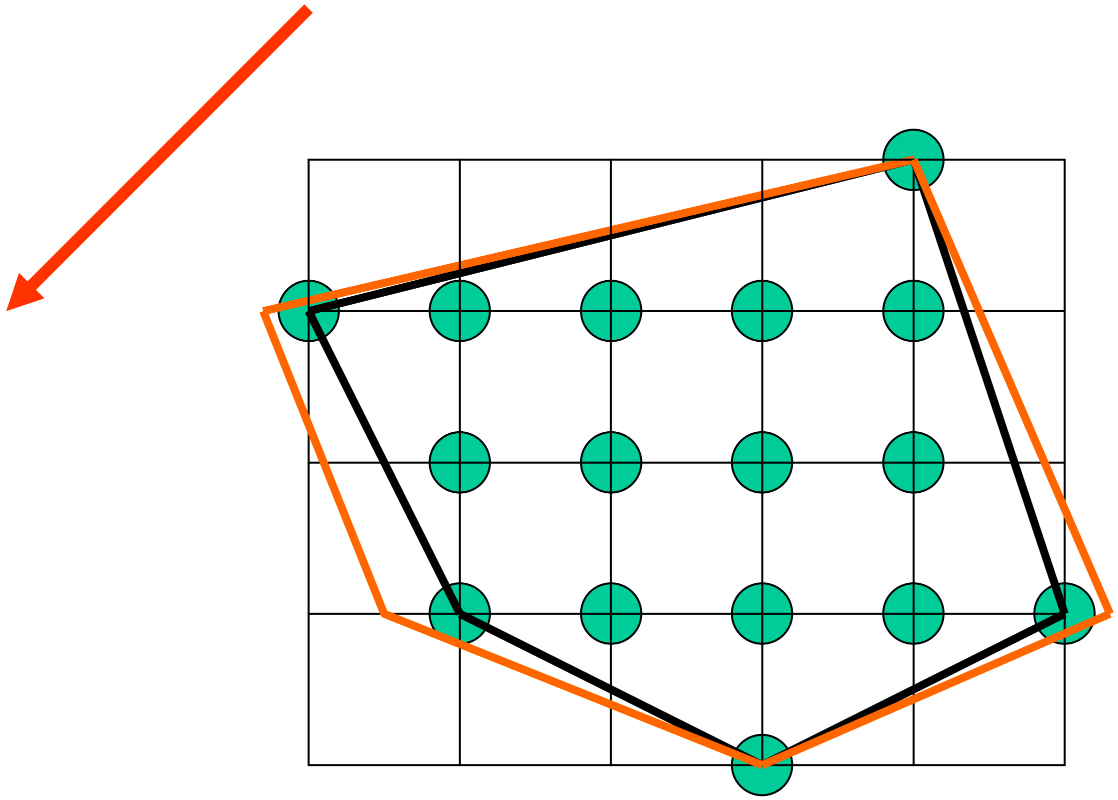
Konvexe Hülle über diese Menge

Branch & Cut (Grundidee)



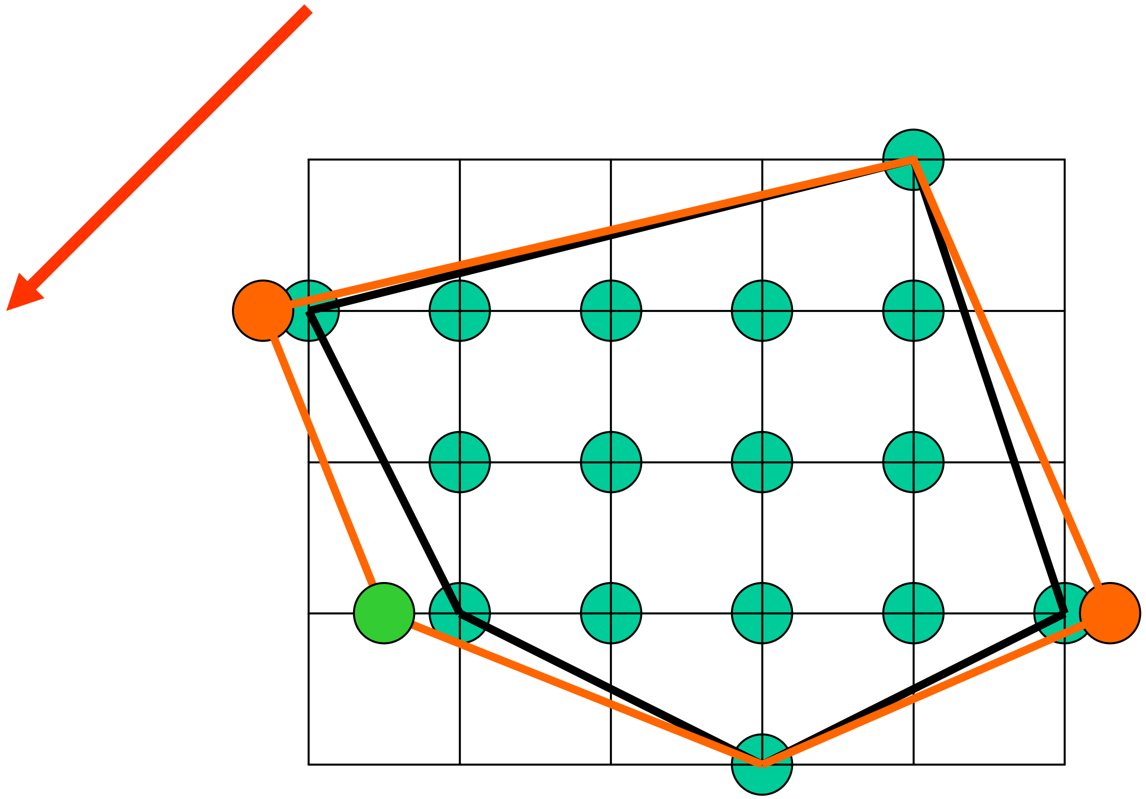
Die Beschreibung der konvexen Hülle durch lineare Un-/gleichungen ist i.A. nicht bekannt.

Branch & Cut (Grundidee)



Lösung: stattdessen Relaxierung der GLP-Formulierung

Branch & Cut (Grundidee)



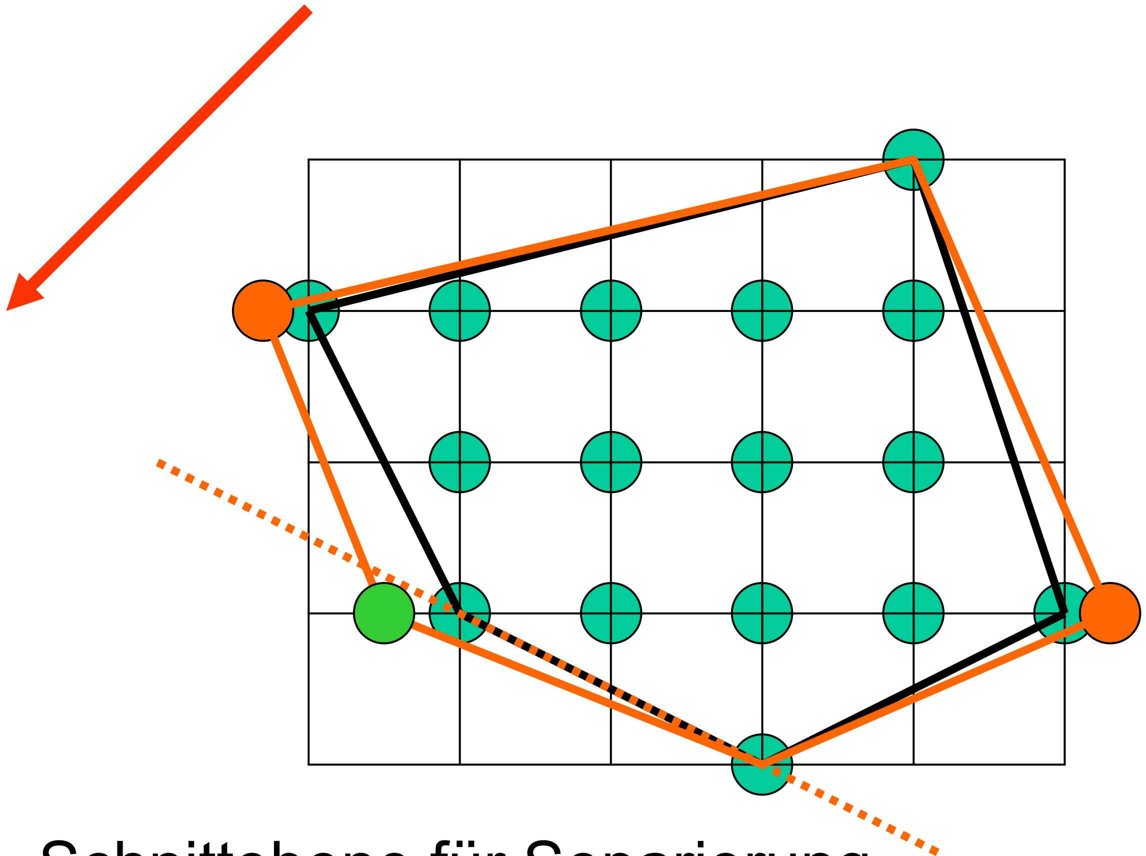
Lösungspunkt über die LP-Relaxierung ist aber nicht zulässig für unser Originalproblem

Branch & Cut (Grundidee)

- Identifiziere die zulässigen Lösungen mit 0/1-Vektoren
- Beschreibe die konvexe Hülle dieser Vektoren möglichst gut durch lineare Ungleichungen
- Finde möglichst gute Algorithmen, die für einen gegebenen Punkt von diesem verletzte Ungleichungen finden bzw. feststellen, dass keine solchen existieren.

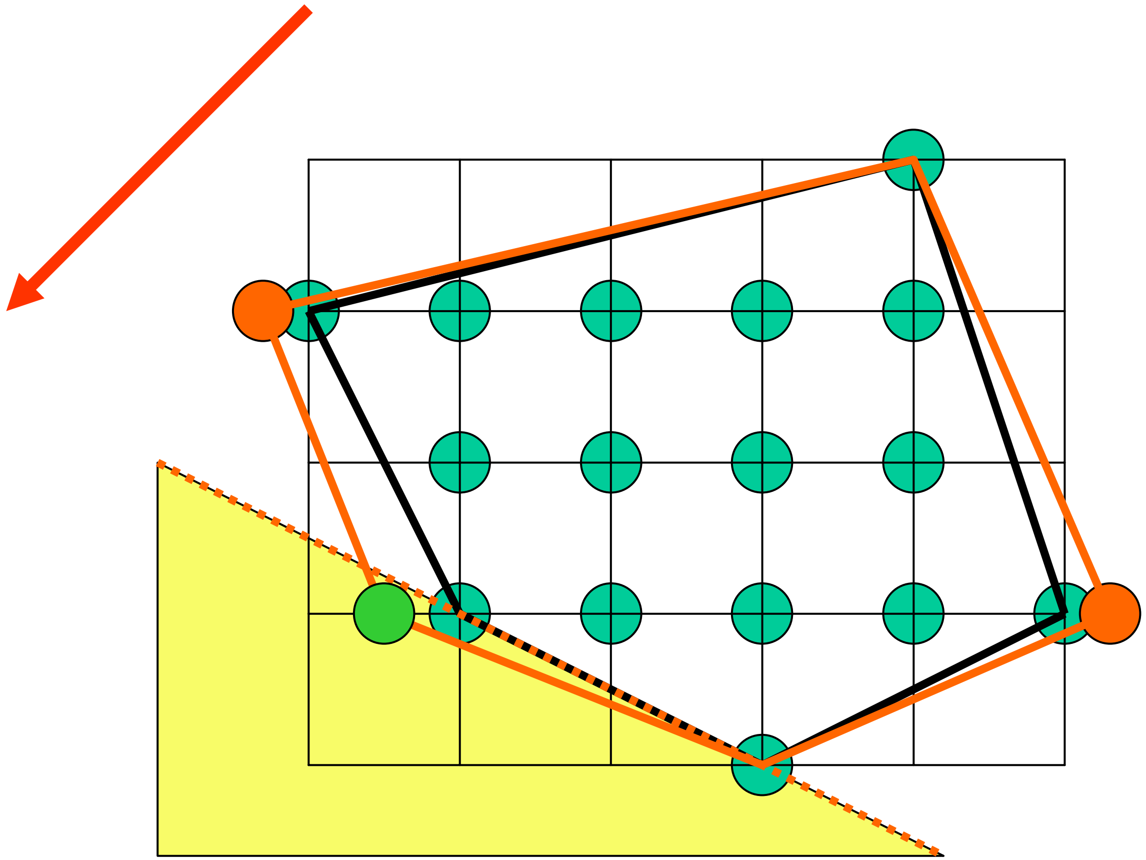
$\longrightarrow$ **Separierung**

Branch & Cut (Grundidee)

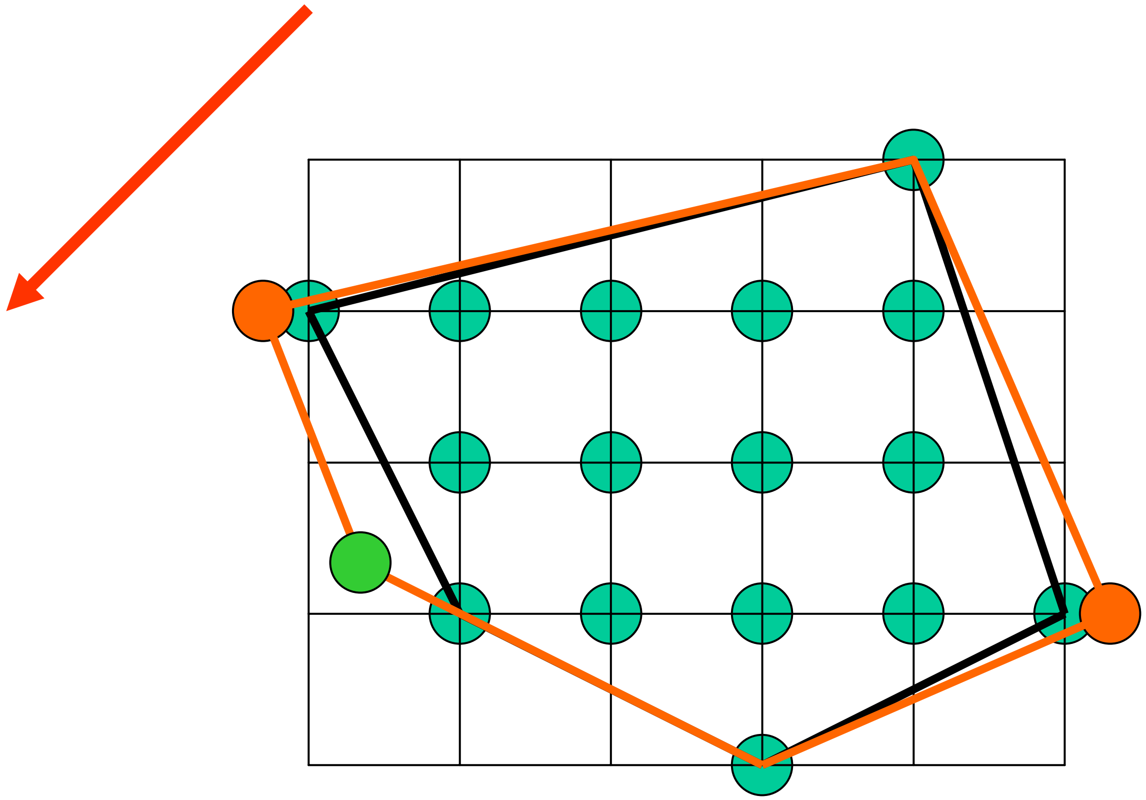


Schnittebene für Separierung

Branch & Cut (Grundidee)

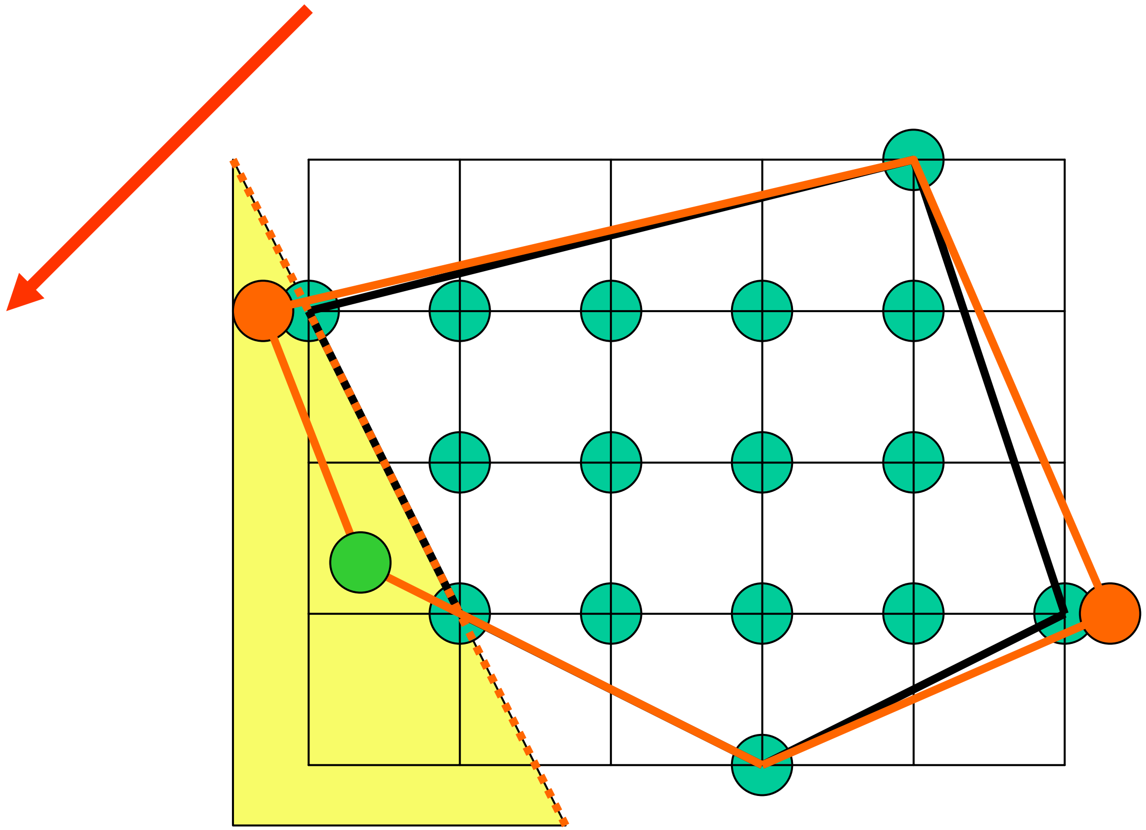


Branch & Cut (Grundidee)



neuer Lösungspunkt der LP-Relaxierung

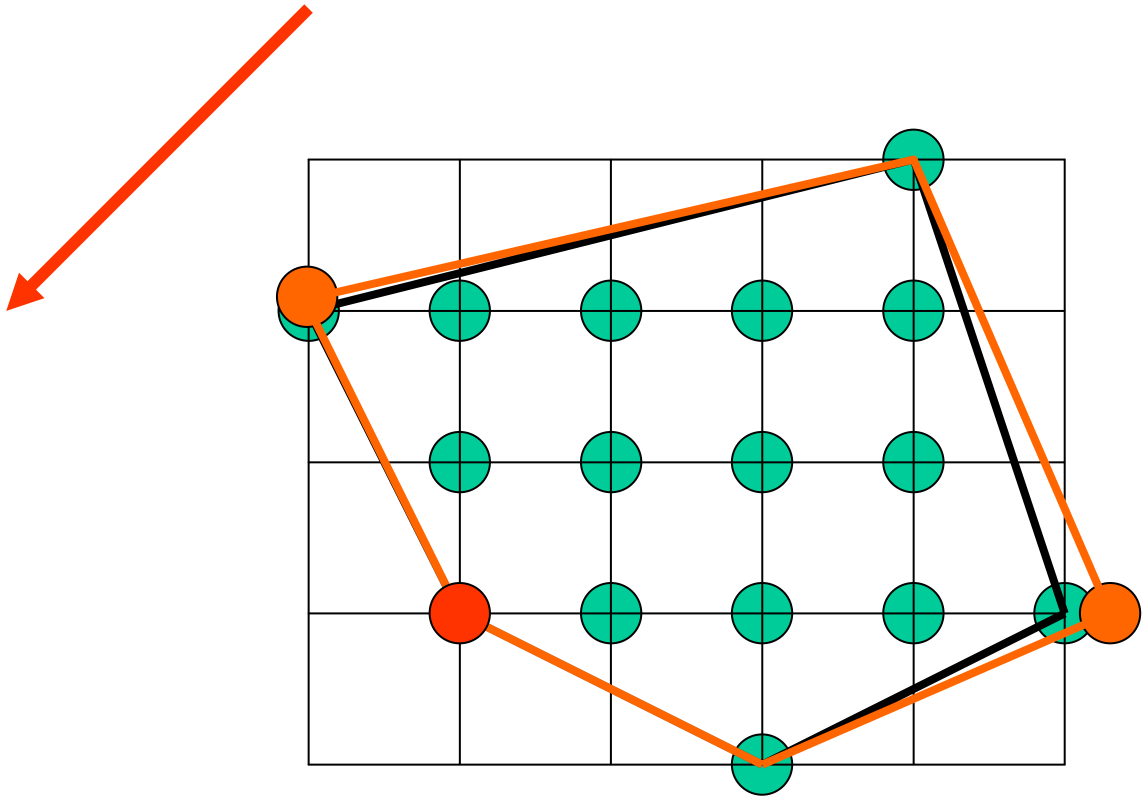
Branch & Cut (Grundidee)



Hinzufügen einer Schnittebene: „schneidet den Punkt weg“

Branch & Cut (Grundidee)

Schnittebenenverfahren (Cutting Plane Method)

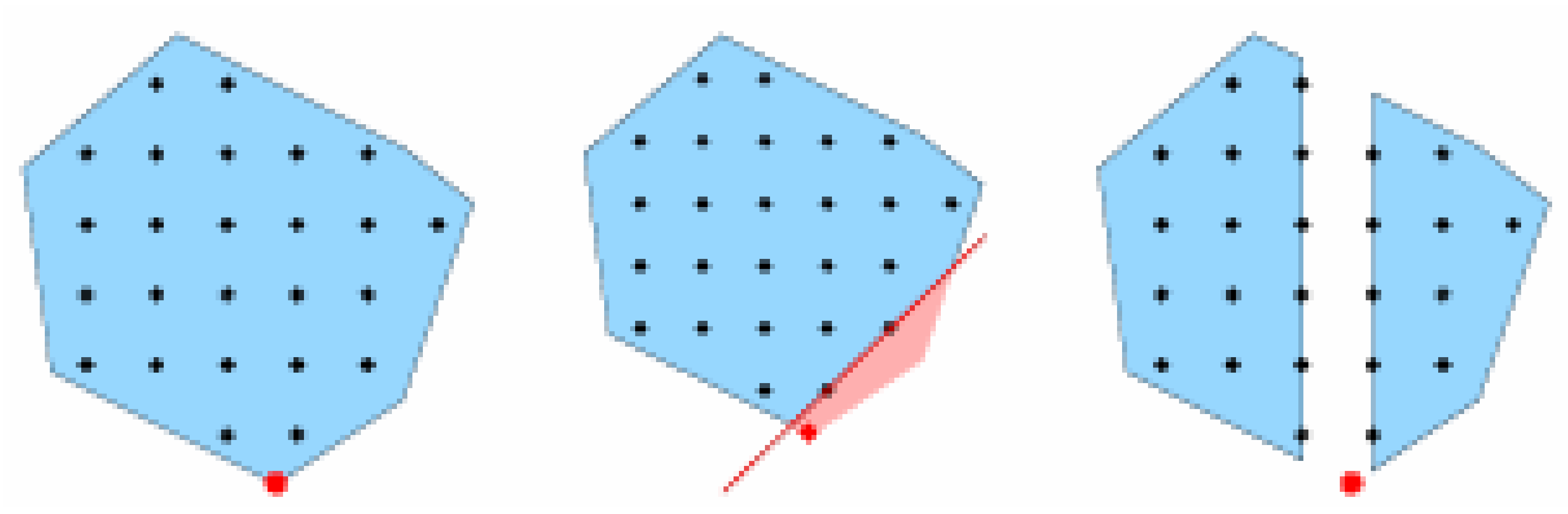


neuer Lösungspunkt der LP-Relaxierung
→ zulässig und damit optimal

Und wenn man gar keine Schnittebenen mehr findet aber nicht ganzzahlig (bzw. optimal) ist?

→ Branch

Branch & Cut (Grundidee)



Bound Cut Branch

Branch & Cut (Grundidee)

Separierungs-
problem

- Löse Relaxierungen mit Schnittebenenverfahren.

  → **Cut**

- Verzweige, wenn keine Schnittebenen gefunden wird, aber die Lösung nicht ganzzahlig ist.

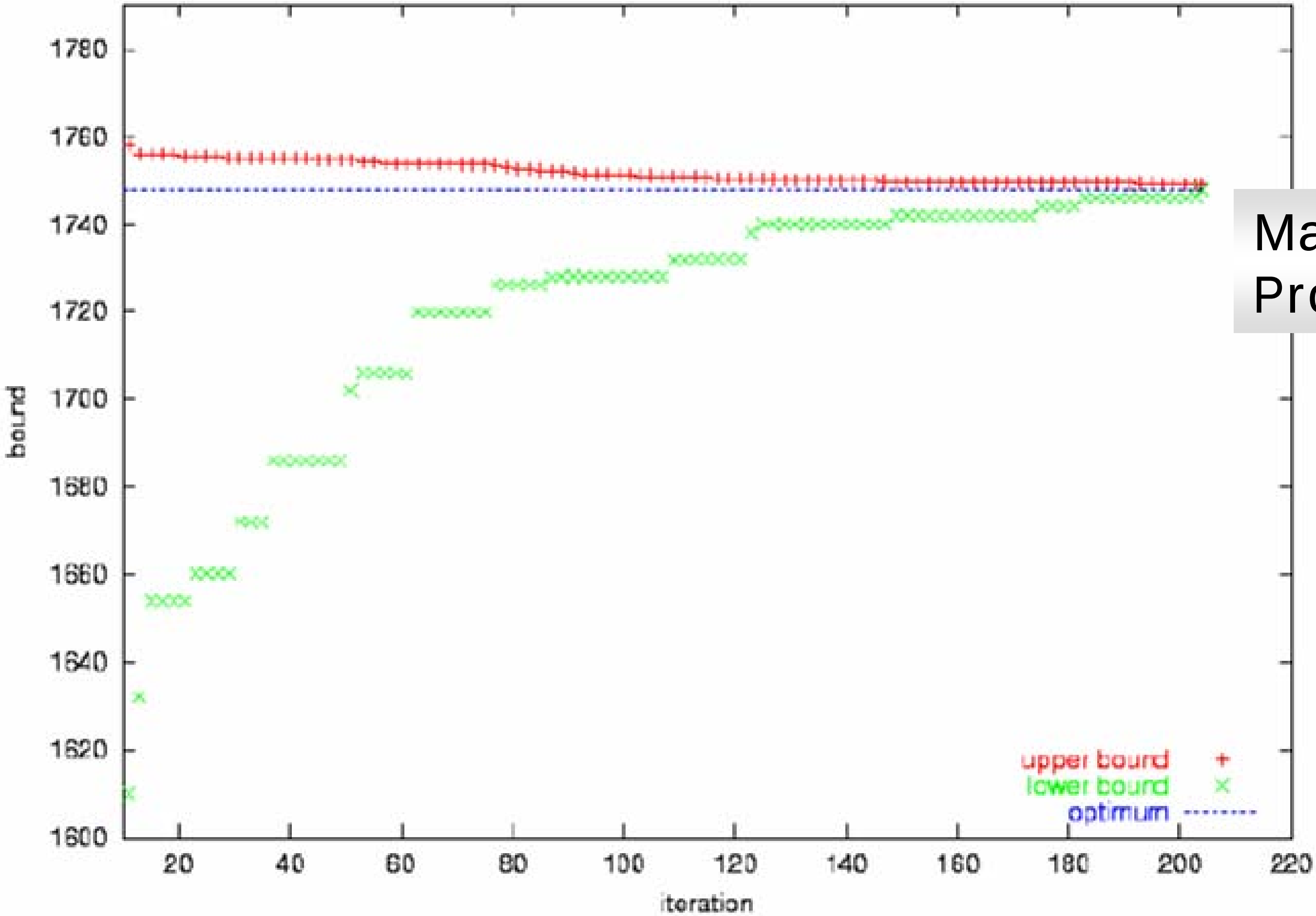
  → **Branch**

- Finde gute zulässige Lösungen basierend auf fraktionellen Lösungen. → **Exploit**

- Schneide nichtprofitable Teilbäume weg.

  → **Bound**

Eine typische B&C Berechnung



Maximierungs Problem

Nächstes Mal: Beispiel TSP