



Non-Planar Core Reduction

Eine Anwendung von SPQR-Bäume

Markus Chimani
 Informatik LS11, Uni Dortmund
 [Gutwenger, Chimani; GraphDrawing 2005]

Übersicht

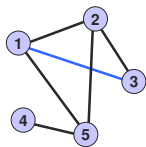


- Wie misst man Nicht-Planarität?
- Wie berechnet man diese Maße?
 - NP hart!
- Reduktion der Graphen auf kleinen Kern (*Non-Planar Core*)
 - Wie funktioniert die Reduktion?
 - Warum funktioniert die Reduktion?

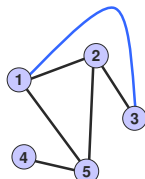
Planarität



- Zeichnungen eines Graphen:



Nicht-Planare Zeichnung



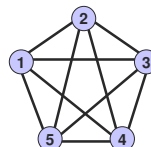
Planare Zeichnung

- \exists planare Zeichnung \Rightarrow planarer Graph

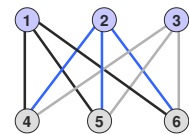
Nicht-Planarität



- Kuratowski-Graphen:



K_5

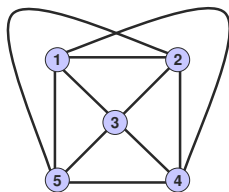


$K_{3,3}$

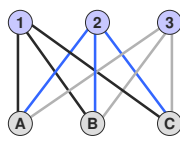
Nicht-Planarität



- Kuratowski-Graphen:



K_5

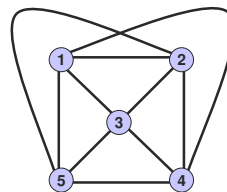


$K_{3,3}$

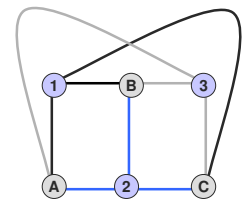
Nicht-Planarität



- Kuratowski-Graphen:



K_5

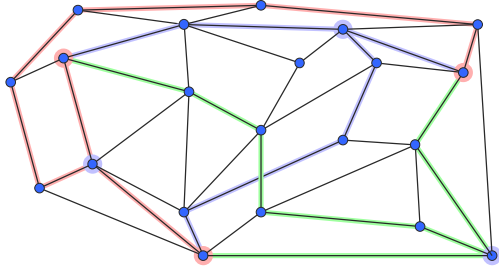


$K_{3,3}$

Nicht-Planarität



- Satz von Kuratowski: [K. Kuratowski, 1930]
Graph planar \Leftrightarrow Graph enthält keine K_5 und $K_{3,3}$ Subdivisions



VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Wie misst man Nicht-Planarität?



„Wie sehr nicht-planar ist ein Graph G ?“

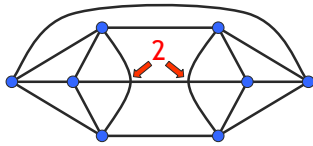
→ Viele unterschiedliche Maße!!

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Wie misst man Nicht-Planarität?



- Crossing Number $\nu(G)$ (ny), $cr(G)$
 - Die kleinste Zahl k , so dass eine Zeichnung mit k Kreuzungen existiert.



NP hart: M.R. Garey and D.S. Johnson. Crossing number is NP-complete. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1983.

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Wie misst man Nicht-Planarität?



- Viele weitere Maße existieren!
 - Skewness, Thickness, Genus, Coarseness, Vertex Deletion No., Splitting No., ...
- Viele Definitionen analog für verschiedene Einschränkungen:
 - straight-line,
 - konvexe Positionen,
 - 2-Schichten, ...

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Lösungsansätze (Auswahl)



- Heuristiken
 - *Crossing Number*: Batini et al. 1984; Gutwenger, Mutzel 2003
 - *Skewness*: Jayakumar et al. 1989; Djidjev 1995; ...
 - *Thickness*: Mutzel et al. 1998
- Approximationsalgorithmen
 - *Crossing Number*: Bhatt, Leighton 1984 (bounded degree)
 - *Skewness*: Calinescu et al. 1998
- FPT Algorithms
 - *Crossing Number*: Grohe 2001; Reed, Kwarabayashi 2007
- Exakte Verfahren: Branch & Cut (& Price)
 - *Crossing Number*: Buchheim et al. 2005
 - *Skewness*: Jünger, Mutzel 1996

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non-Planar Core



Preprocessing ist wichtig !

Verkleinern des Problems,
Abschneiden von „einfachen“ Teilen
→ SPQR Bäume !

Nun:

Crossing Number

Skewness, Genus: analog, Beweise einfacher
Thickness: fast analog, Beweise viel einfacher

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Klassisches Preprocessing

- Nur 2-ZHK betrachten
- Ketten (Grad-2 Knoten) reduzieren

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Duh!

- Mehrere Kanten mit selben Start- und Zielknoten können in einer kreuzungsminimalen Zeichnung immer „parallel“ laufen.

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Gähn...

- Planare 3-ZHK haben genau eine planare Einbettung und deren Spiegelbild.

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Reduktion

- Hm...
 - Zeichnen von parallelen Teilen ist „einfach“
 - Zeichnen von seriellen Teilen ist „einfach“
 - K_5 und $K_{3,3}$ sind dreizusammenhängend
 - Zeichnen von planaren dreizusammenhängenden Teilen ist „einfach“
- Idee:
 - Reduzieren des Graphens um die „einfachen“ Teile
 - Lösen des Problems auf dem Rest
 - Einfache Teile wieder einbauen - ohne die Optimalität zu verletzen! → Geht das wirklich?

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

2-Komponenten

- 2-Komponente K : Teilgraph der nur über zwei Knoten (s, t) am Rest des Graphen angebunden ist.
- Planar, Maximal
- Durchkreuzen von K verursacht mindestens $\text{mincut}_{s,t}$ viele Kreuzungen
- Alle maximalen planaren 2-Komponenten durch Kante mit entsprechendem Gewicht ersetzen → Non-Planar Core

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Rücktransformation

- Core $(C, w) \rightarrow$ Graph G :
Gewichtete Kanten → „einfache“ Einbettung der planaren st -Komponenten

Optimal gezeichneter Core Rücktransformation

$v(C, w) \geq v(G)$

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Optimalität

Aber ist das optimal?

Also: $v(G) = v(C, w)$?

Es gilt:

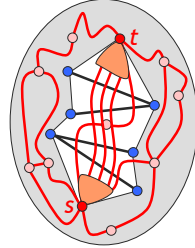
$$v(G) \leq v(C, w)$$

Zu zeigen:

$$v(C, w) \leq v(G) \Rightarrow$$

- Kreuzungsmin. Zeichnung von G modifizieren:

- Alle 2-Komponenten nach unserer Definition zeichnen



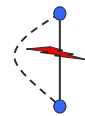
1. Entferne 2-Komponente K
2. Füge K auf kürzestem Weg ein.
3. weniger oder gleich viele Kreuzungen

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Kreuzen durch SPQR-Komponenten

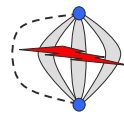
- SPQR-Knoten repräsentieren 2-Komponenten!
- Wie teuer ist das Durchkreuzen einer Komponente?
 - Komponenten erhalten ein Gewicht
 - Gewicht rekursiv ermitteln

Kante (Q)



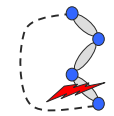
Kosten: 1

Parallel (P)



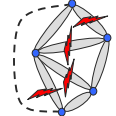
Summe

Seriell (S)



Minimum

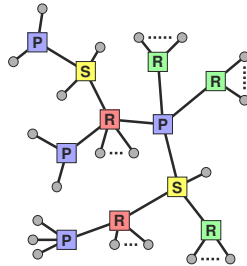
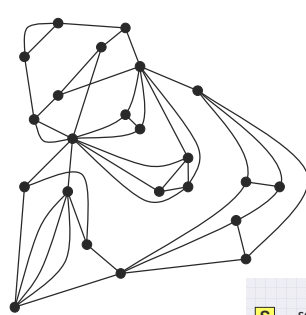
3-ZHK (R)
planar



mincut_{st}

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

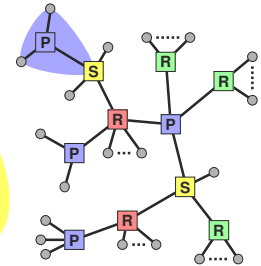
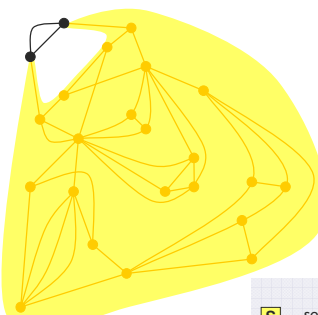
SPQR Baum



- ...Kante (Q)
- S** ...seriell
- P** ...parallel
- R** ...3-zus., planar
- R** ...3-zus., nicht-planar

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

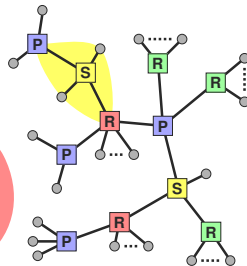
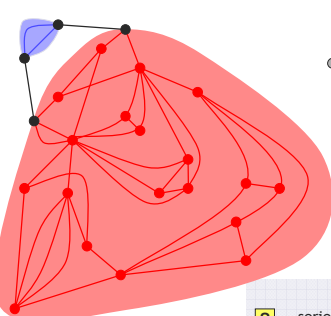
SPQR Baum



- ...Kante (Q)
- S** ...seriell
- P** ...parallel
- R** ...3-zus., planar
- R** ...3-zus., nicht-planar

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

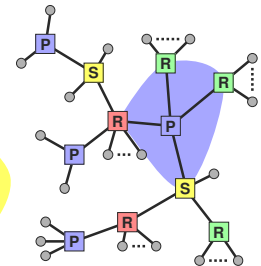
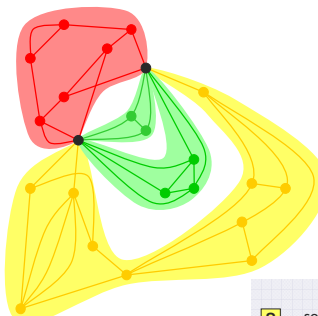
SPQR Baum



- ...Kante (Q)
- S** ...seriell
- P** ...parallel
- R** ...3-zus., planar
- R** ...3-zus., nicht-planar

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

SPQR Baum



- ...Kante (Q)
- S** ...seriell
- P** ...parallel
- R** ...3-zus., planar
- R** ...3-zus., nicht-planar

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

Kanten bekommen ein Gewicht:
normale Kanten: 1

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

Endelement
Vorgänger

Abschneiden von Endelementen (= "Blätter" im SPQR-Baum ohne Q-Knoten):
Betrachtung vom Vorgänger aus

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

Endelement
Vorgänger

Endelement „einfach“ (P,S, planar R)
→ Ersetzen durch Kante mit Gewicht des
Minimum st-Cuts

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

Endelement
Vorgänger

Und das für alle Endelemente...
Achtung: Knoten können auch später erst zu
Endelementen werden.

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

Vorgänger
Endelement

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

Vorgänger
Endelement

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ – Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

Jedes Endelement ist ein nicht-planarer R-Knoten
→ Fertig?

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

Planare 2-Komponente !

Für alle P-Knoten:
alle Q-Knoten zusammenfassen

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

Planare 2-Komponente !

Für alle S-Knoten:
konsequente Q-Knoten zusammenfassen

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

FERTIG!

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Non Planar Core

$|V| = 23$
 $|E| = 45$

$|V| = 11$
 $|E| = 18$ (24)

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Pseudocode

- Graph $G \rightarrow \text{Core}(C, w)$:
 - WHILE** $b \leftarrow$ noch nicht betracht. Endelement im SPQR-Baums
 - IF** $b \neq$ nicht-planarer R-Knoten
 - $w_b \leftarrow$ Minimum st -Cut durch b
 - Verwandle b in virtuellen Q-Knoten mit Gewicht w_b
 - FORALL** $b \leftarrow$ P-Knoten
 - $w_q \leftarrow$ Summe aller Gewichte der adjazenten Q-Knoten
 - Fasse alle adj. Q-Knoten zu virt. Q-Knoten q zusammen, Gewicht w_q
 - FORALL** $b \leftarrow$ S-Knoten
 - FORALL** $F \leftarrow$ Folge von konsekutiven Q-Knoten
 - $w_q \leftarrow$ minimales Gewicht der Knoten in F
 - Fasse F zu einem virtuellen Q-Knoten q zusammen, Gewicht w_q

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Laufzeit

- Laufzeit: Linear?
- Aufbau SPQR Baum ✓
- „Einfache“ Endelemente abschneiden
 - Über alle Endelemente laufen ✓
 - Bestimmen ob Blatt abgeschnitten wird ???
 - Planaritätstest in linearer Zeit [Hopcroft, Tarjan, 1974], [Boyer, Myrvold, 04]...
 - Jede Kante bzw. virtuelle Kante kommt nur in einem Test vor
 - Kosten der Blätter berechnen ???
 - Minimum st -Cut in linearer Zeit?
- Q-Kinder von S- und P-Knoten am Ende zusammenfassen ✓

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Laufzeit - Min st -Cut

Berechnung von Minimum st -Cut:

- trivial für S-, P- und Q-Knoten
- nie für nicht-planare R-Knoten benutzt
- planare R-Knoten
- fixe Einbettung

Kosten der Kante = Kosten der entspr. dualen Kante

Kürzestes Wege Problem → nicht Linearzeit!

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Laufzeit - Min st -Cut

Trick:

- Berechnen des Min. st -Cuts erst nach der Reduktion

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Pseudocode (Version 2)

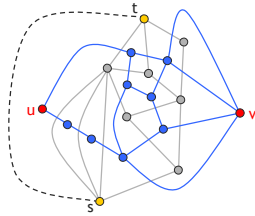
- WHILE** $b \leftarrow$ noch nicht betracht. Endelement im SPQR-Baums
- IF** $b \neq$ nicht-planarer R-Knoten
 - ~~$w_b \leftarrow$ Minimum st -Cut durch b~~
 - Verwandle b in virtuellen Q-Knoten mit Gewicht w_b
- FORALL** $b \leftarrow$ P-Knoten
 - ~~$w_q \leftarrow$ Summe aller Gewichte der adjazenten Q-Knoten~~
 - Fasse alle adj. Q-Knoten zu virt. Q-Knoten q zusammen, Gewicht w_q
- FORALL** $b \leftarrow$ S-Knoten
 - FORALL** $F \leftarrow$ Folge von konsekutiven Q-Knoten
 - ~~$w_q \leftarrow$ minimales Gewicht der Knoten in F~~
 - Fasse F zu einem virtuellen Q-Knoten q zusammen, Gewicht w_q
- FORALL** $b \leftarrow$ virtuelle Q-Knoten im Core
 - Expandiere b zu G_b
 - $w_b \leftarrow$ Minimum st -Cut in G_b
 - Setze Gewicht von b auf w_b

VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Laufzeit - Min st -Cut

Trick:

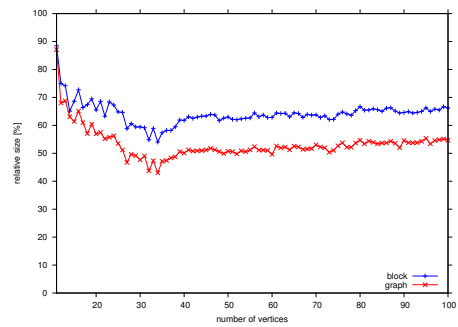
- Berechnen des Min. st -Cuts erst **nach** der Reduktion
- Jede echte Kante kommt nur **in genau einer** planaren st -Komponente vor
- Planare st -Komponenten komplett expandieren
- Breitensuche (BFS) von u nach v
- **LINEAR**
- **Core Reduction: $O(|E|)$**



VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Auswirkungen

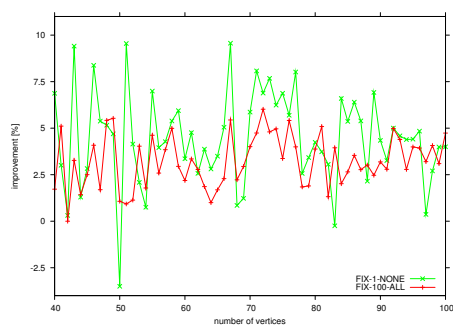
Relative Größe des Non-Planar Core (Rome Graphen)



VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Auswirkungen

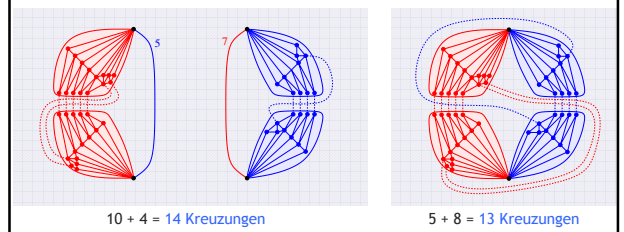
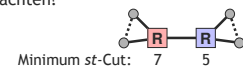
Verbesserung bzgl. Anzahl der Kreuzungen



VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund

Nur R-Knoten ?

- Nur nicht-planare R-Knoten sind kompliziert!
- Warum diese nicht einzeln betrachten?
- Gegenbeispiel:



VO Algorithm Engineering „Non-Planar Core Reduction“ - Markus Chimani, Informatik LS11, Uni Dortmund