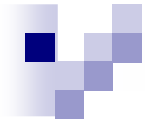




Non-Planar Core Reduction


Bewahrung der Coarseness

Mathias Jansen und Christian Wolf



Inhalt

- Kurzwiederholung *Non-Planar Core Reduction*
- “(Nicht-) Planaritätsmaß” *Coarseness*
 - Definition
 - “Tricky“ Beispiele
- Entwicklung der Beweisidee
- Beweis



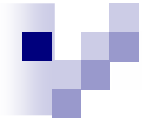
Kurzwiederholung *Non-Planar Core Reduction* (i.F. *NPCR*)

- Reduzierung von Graphen um die planaren Komponenten
- SPQR-Baum ist Hilfsdatenstruktur
- Ersetzung planarer Komponenten G^* (Kanten, serielle, parallele Komponenten oder 3-ZHK) durch Kanten mit Gewicht $w = \text{mincut}_{s,t}(G^*)$
- Nicht-planare 3-ZHK bleiben erhalten!



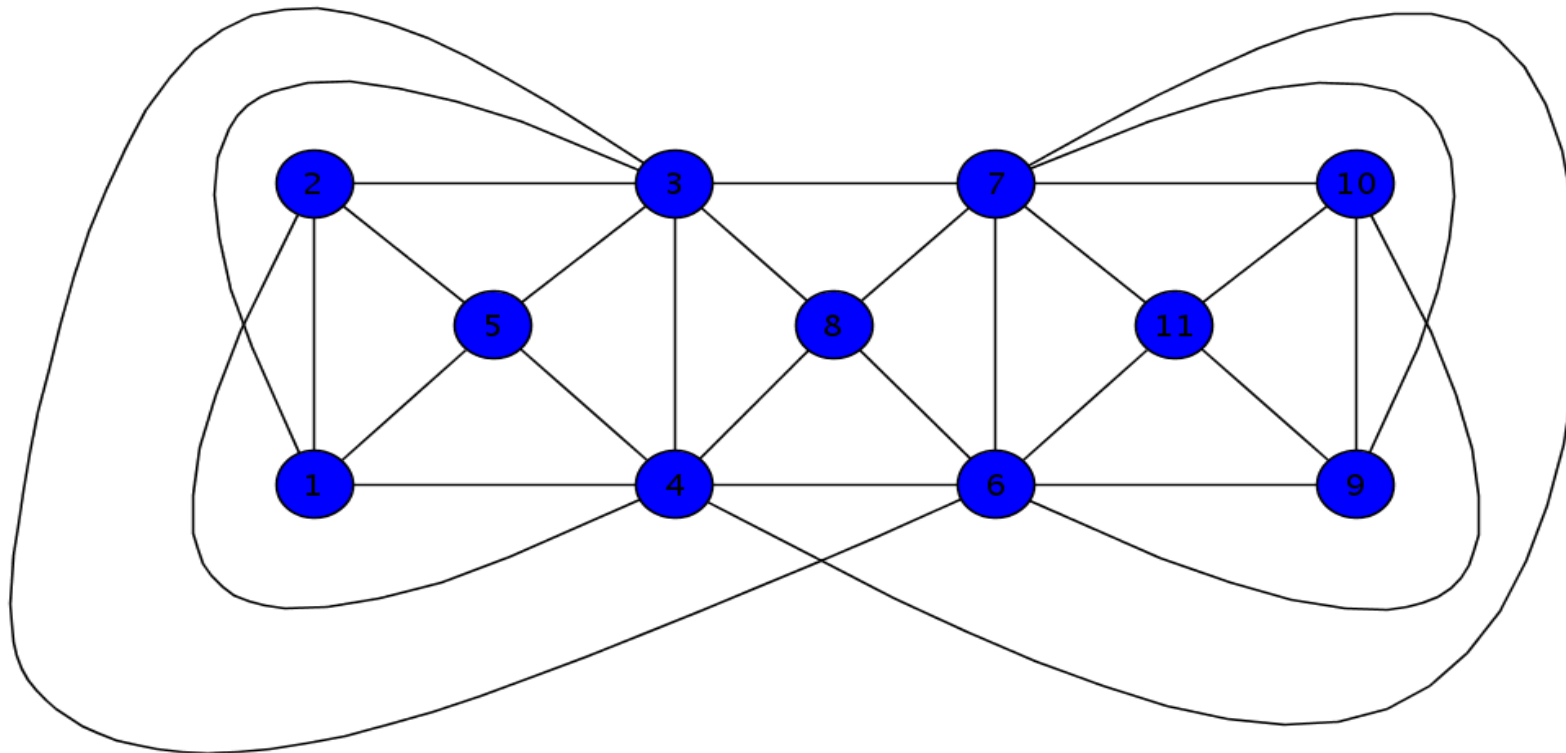
Coarseness - Definition

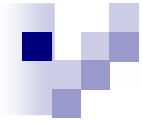
- Weiteres Kostenmaß neben Crossing-Number (#Kantenkreuzungen) und Skewness (kleinste zu entfernende #Kanten)
- Def.: Graph G^* , der durch Ersetzung von Kanten durch unabhängige Pfade eines Graphen G entsteht, heißt *Subdivision* (i.F. SD) von G
- Def.: *Coarseness* $\xi(G, w)$ eines ganzzahlgewichteten Graphen (G, w) ist die größte Zahl k von kantendisjunkten nicht-planaren Subgraphen in G
- Wie sehen die Subgraphen aus? $\longrightarrow K_5$ oder $K_{3,3}$ SDs



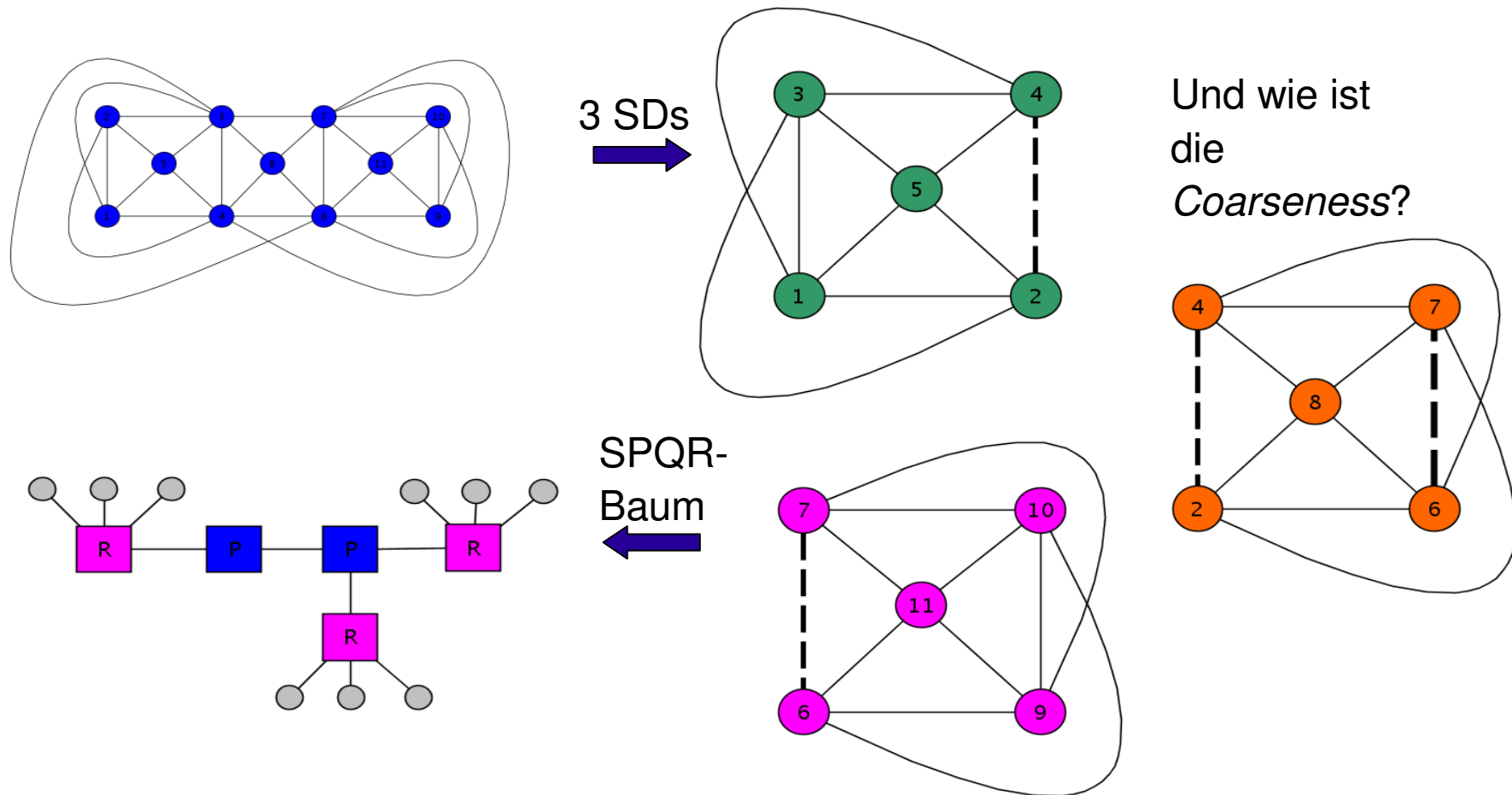
Coarseness – Beispiele (1)

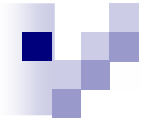
- “Tricky” Beispiel 1:





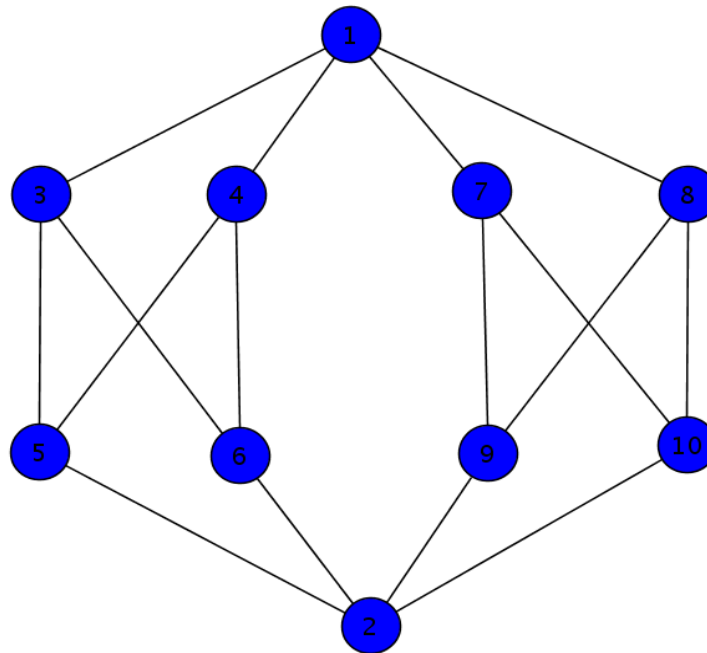
Coarseness – Beispiele (2)

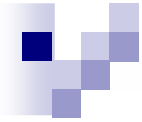




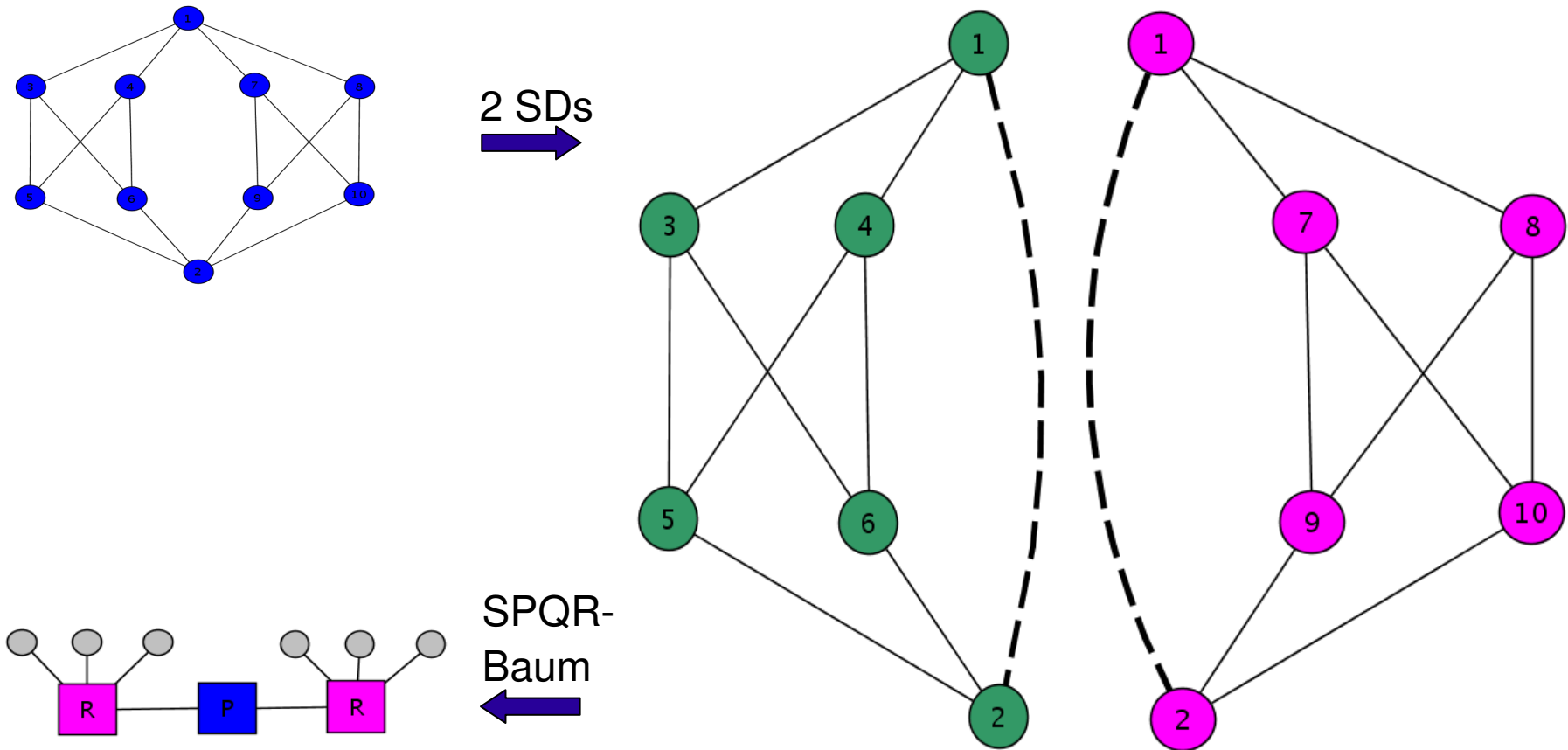
Coarseness – Beispiele (3)

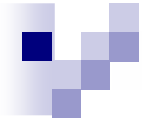
- “Tricky” Beispiel 2:





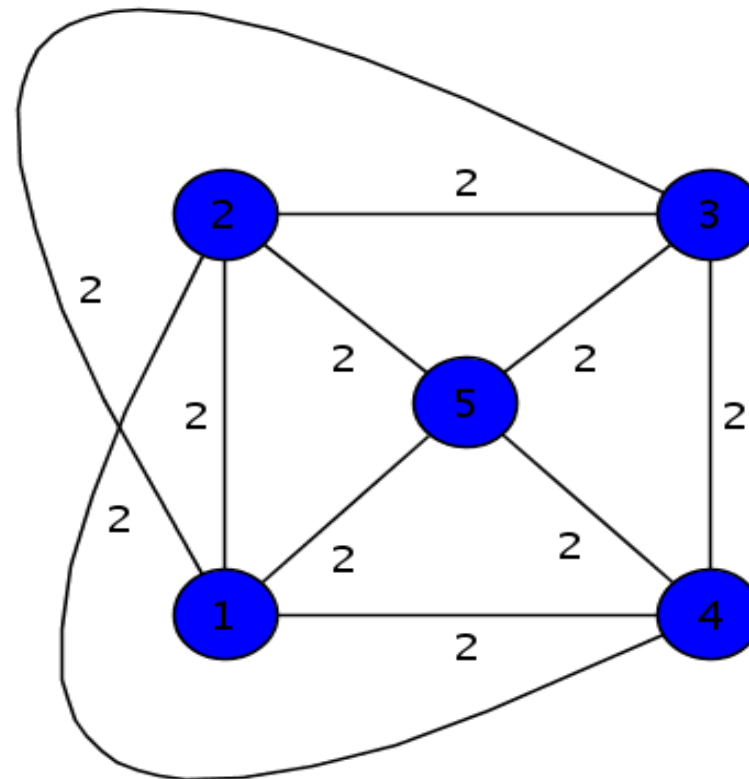
Coarseness – Beispiele (4)

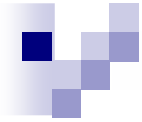




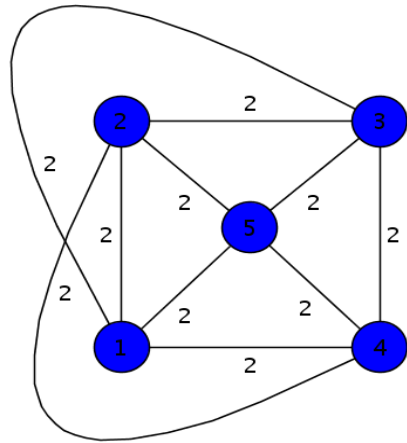
Coarseness – Beispiele (5)

- „Tricky“ Beispiel 3:

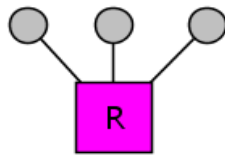
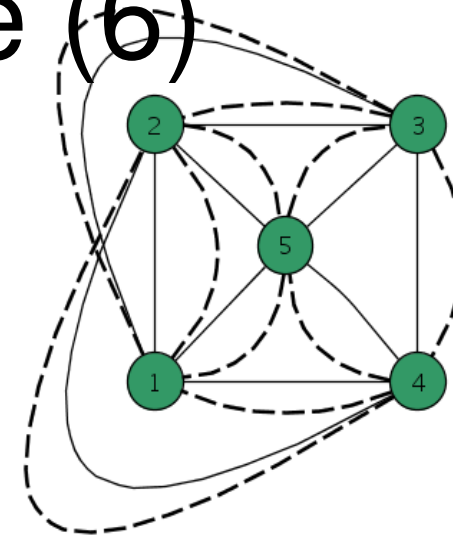




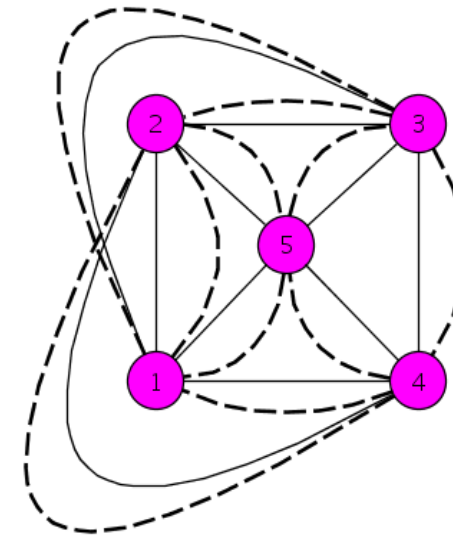
Coarseness – Beispiele (6)



2 SDs
→



←
SPQR-
Baum





Entwicklung der Beweisidee (1)

- Was wird aus den Beispielen ersichtlich?
 - ➔ nicht jede SD trägt zur *Coarseness* bei!
 - ➔ eine *Coarseness*-Einheit kann über mehrere Knoten im SPQR-Baum verteilt sein
- Das macht die Betrachtung etwas „knifflig“
- Unsere Idee: Zeige, dass die minimale Anzahl an Pfaden zwischen je zwei Knoten einer K_5 oder $K_{3,3}$ SD, welche zur *Coarseness* beiträgt, durch *NPCR* erhalten bleibt!

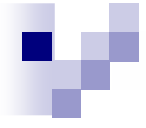


Entwicklung der Beweisidee (2)

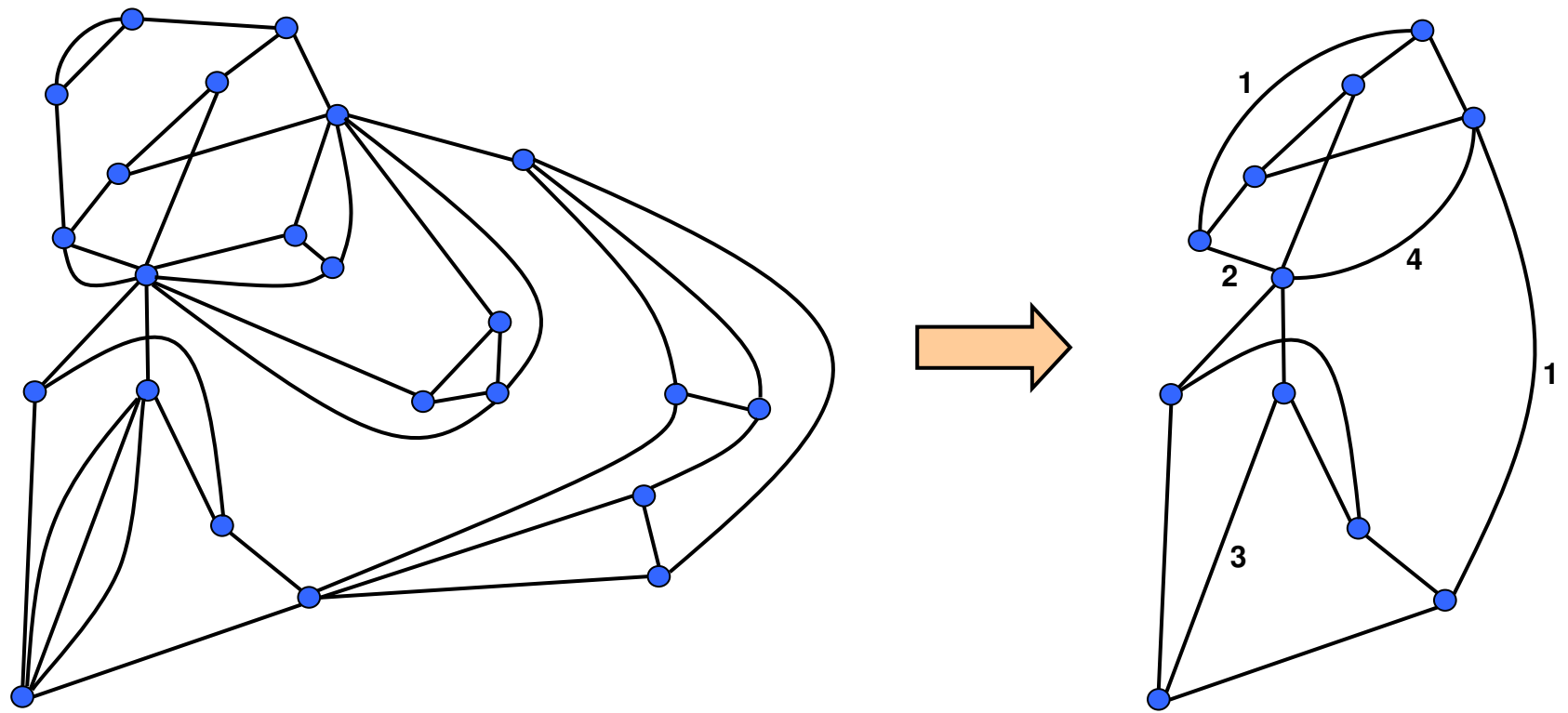
- Anzahl der Sub-Divisions im Core ist nicht kleiner als die Anzahl der Sub-Divisions im Graphen, und umgekehrt

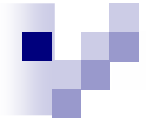
$$\xi(G) \leq \xi(C, w) \quad \text{und} \quad \xi(G) \geq \xi(C, w)$$

- Fallunterscheidung, anhand der Operationen der NPCR

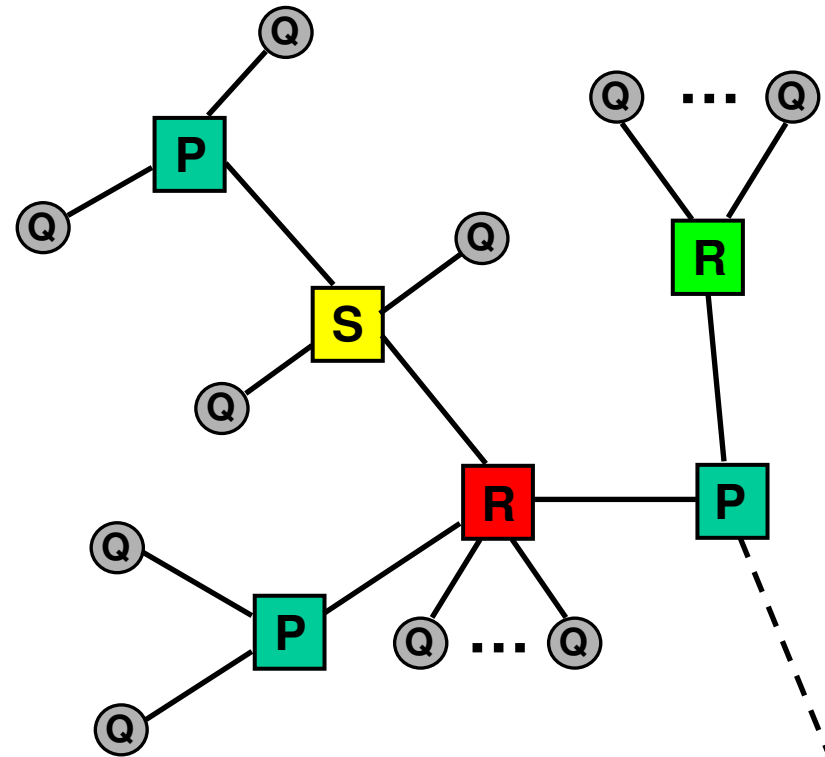
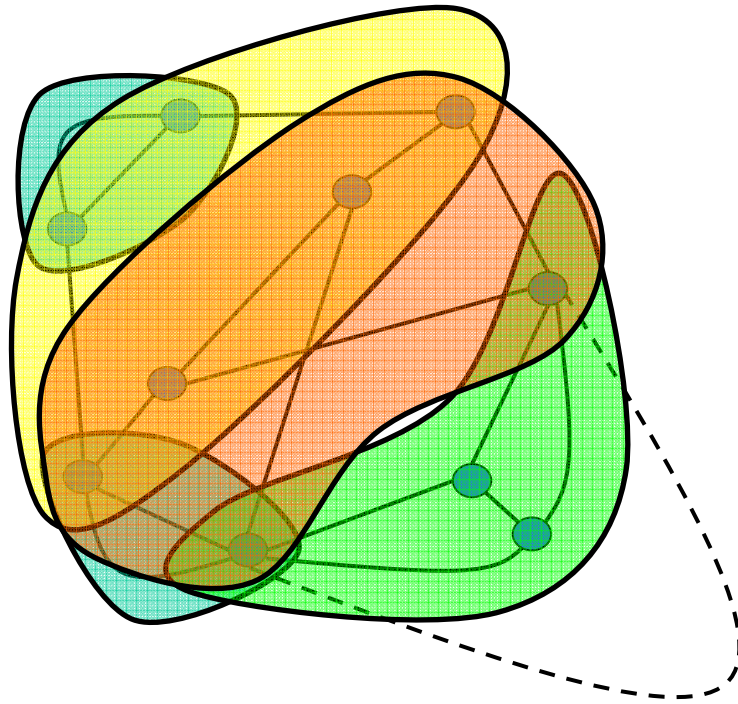


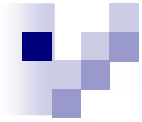
Beispiel





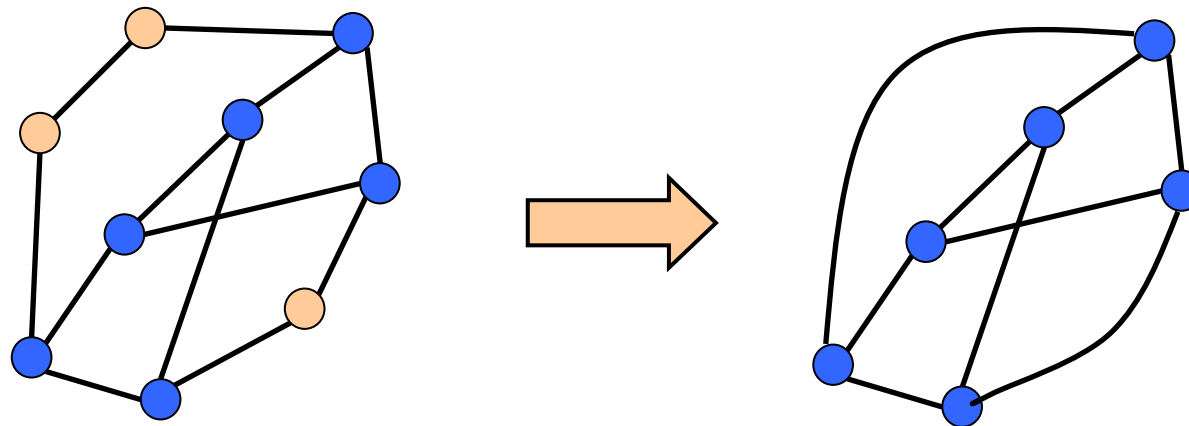
Beispiel





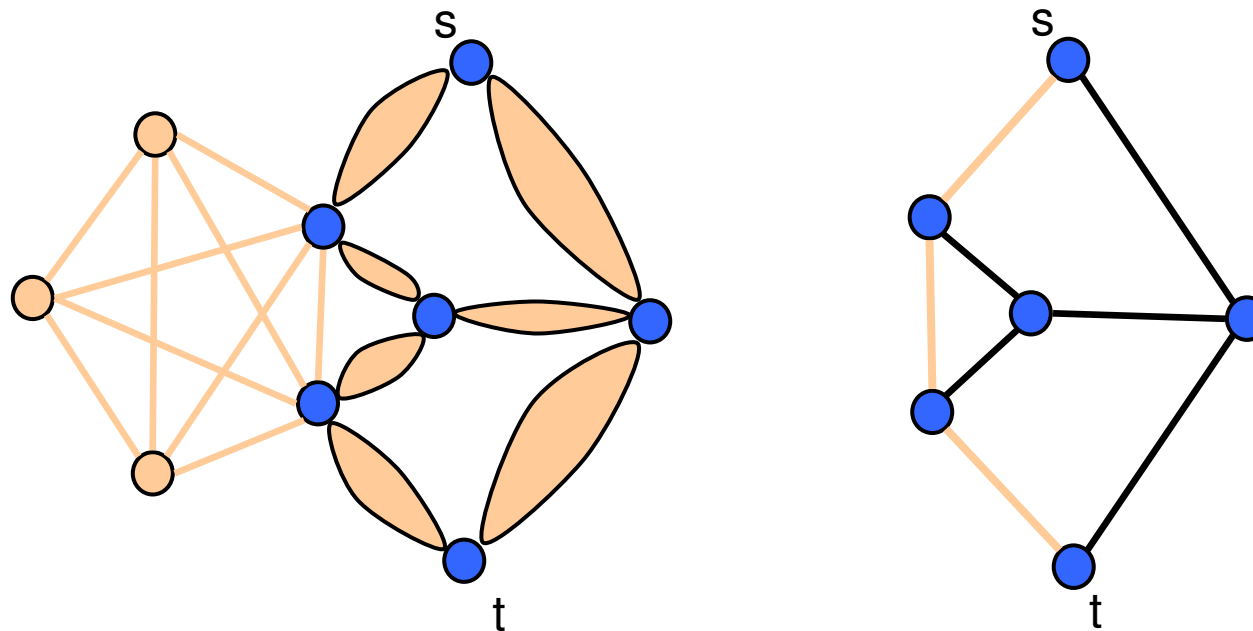
Beobachtung

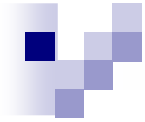
- Die „echten“ Knoten einer SD liegen alle in derselben (nicht-planaren) R-Komponente, gemäß des SPQR-Baums



Konsequenz für planare Komponenten

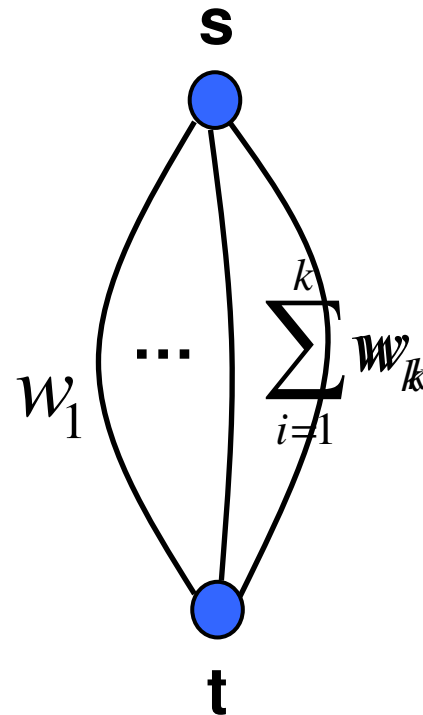
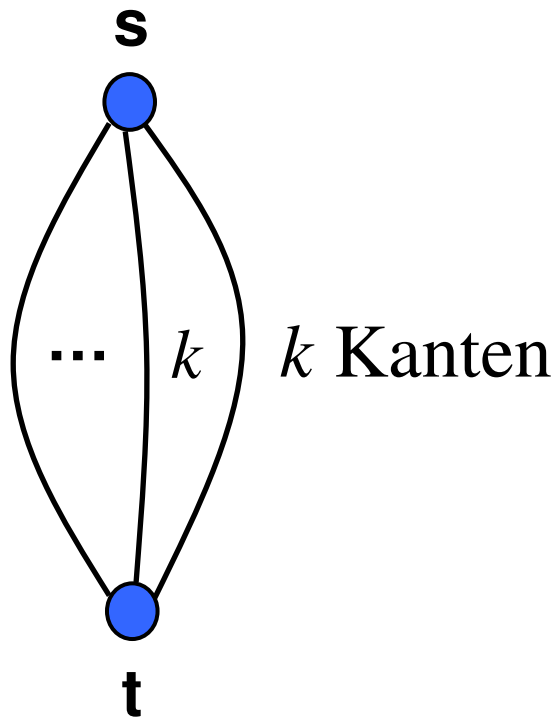
- Teile einer SD, die innerhalb einer planaren Komponente liegen, und die vom Algorithmus reduziert werden, entsprechen (s,t) -Pfad

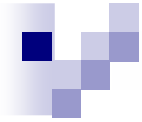




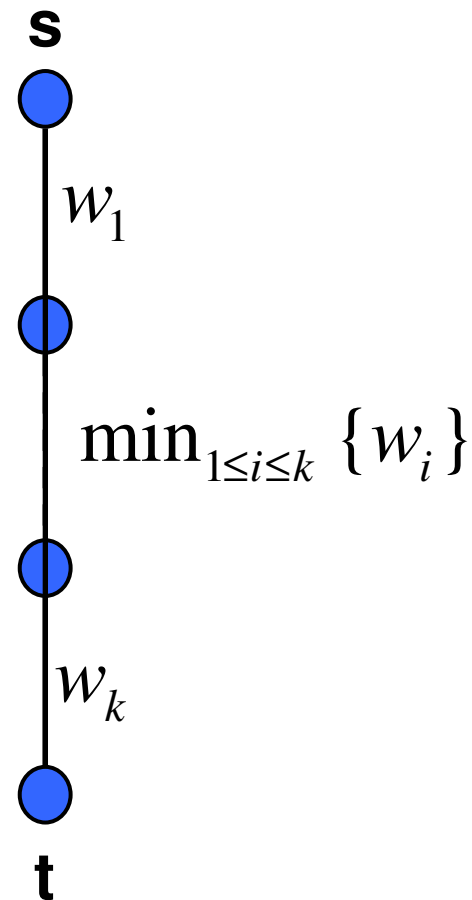
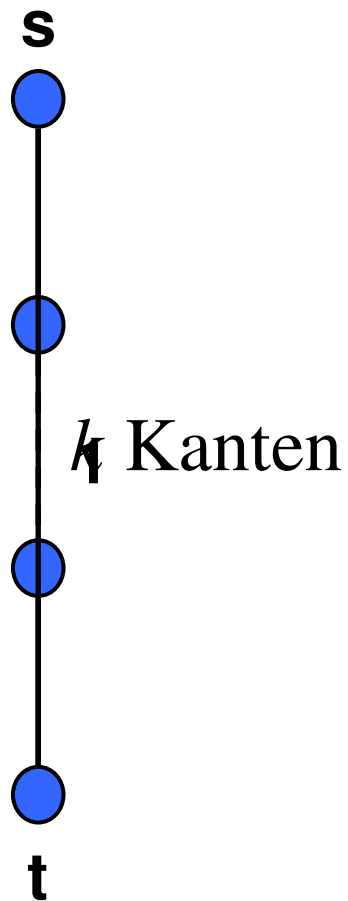
$$\xi(G) \leq \xi(C, w)$$

Fall 1: P-Knoten-Reduktion

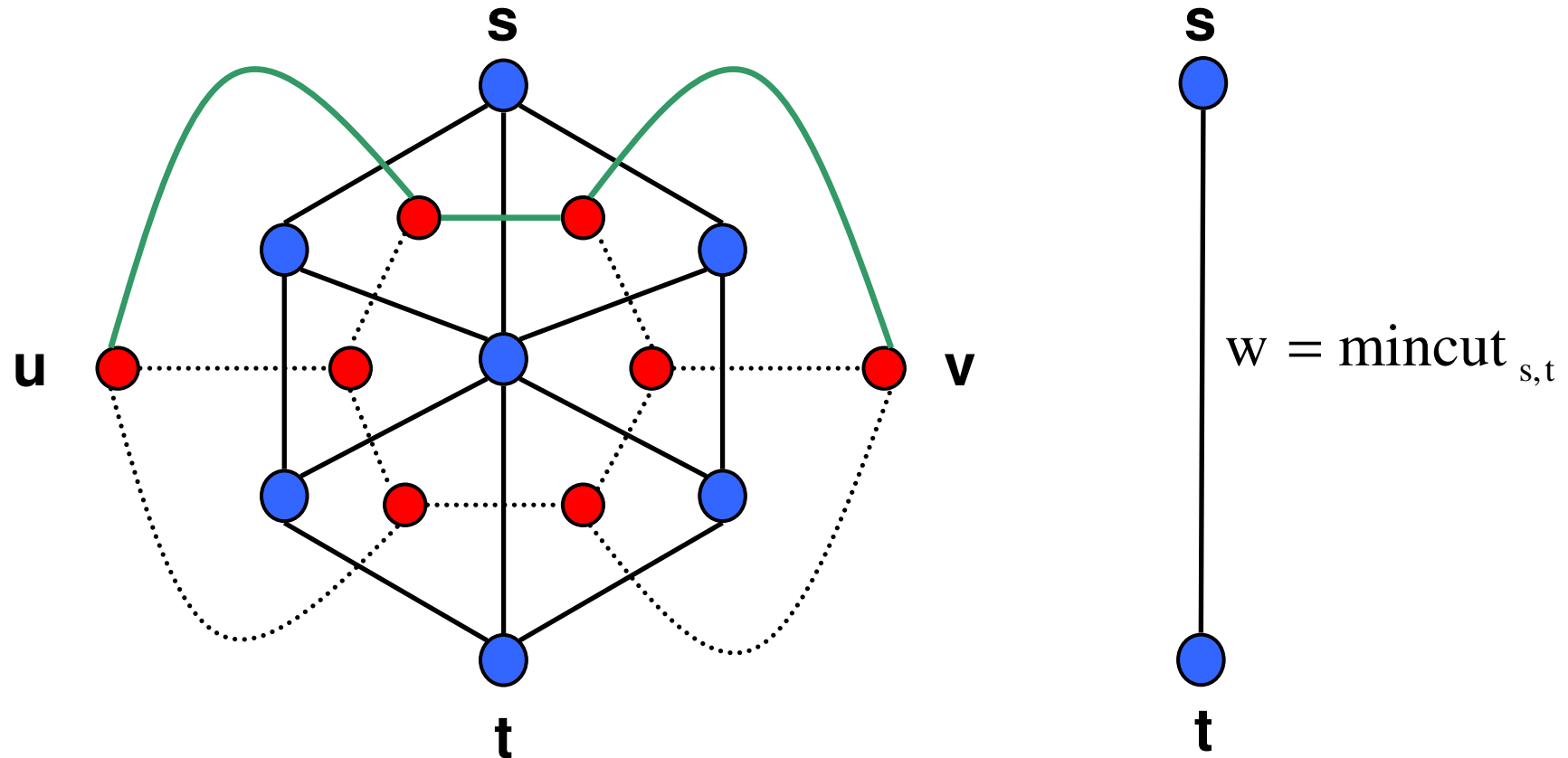


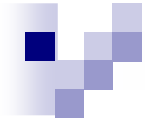


Fall 2: S-Knoten-Reduktion

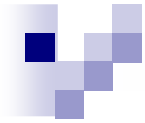


Fall 3: R-Knoten-Reduktion (planar)





$$\xi(G) \geq \xi(C, w)$$

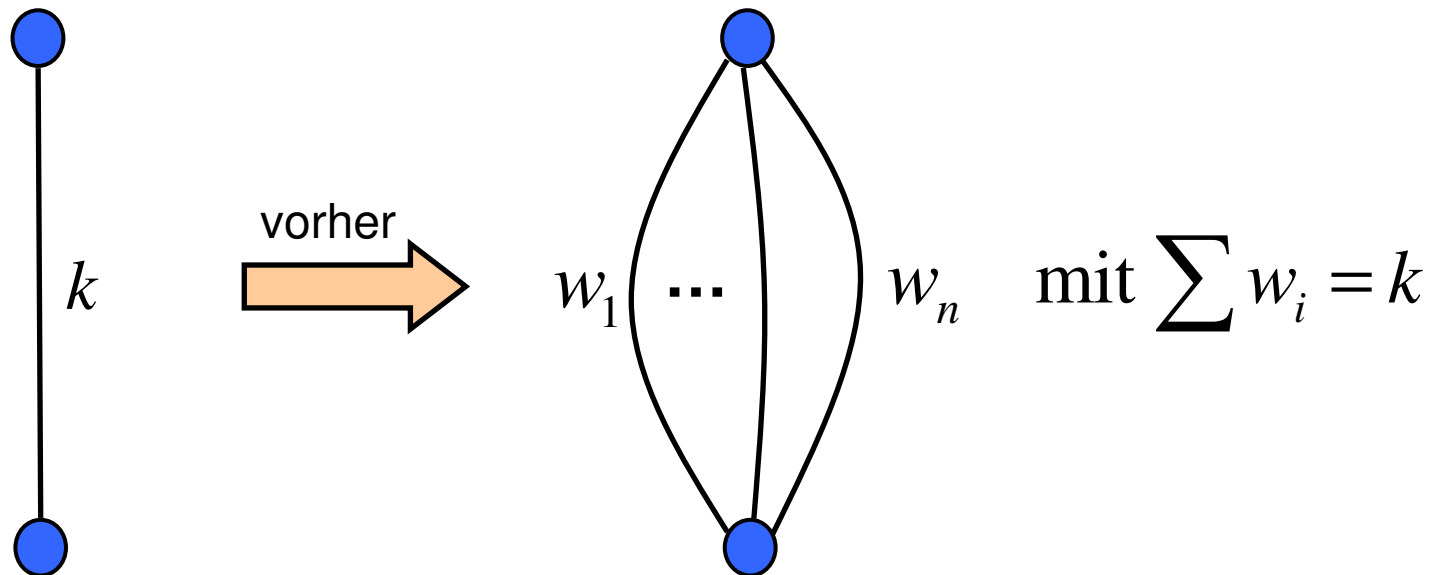


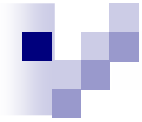
Sub-Division im Core

- Die Kanten sind gewichtet
- zu zeigen: jede gewichtete K_5 oder $K_{3,3}$ SD im Core hat schon vor der Reduktion als SD im ursprünglichen Graphen existiert

Wie ist eine gewichtete Kante entstanden?

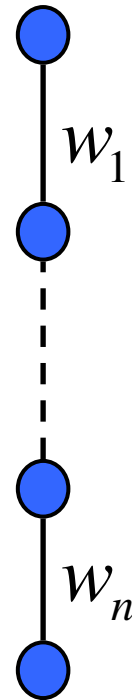
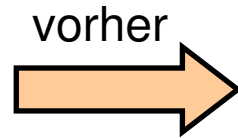
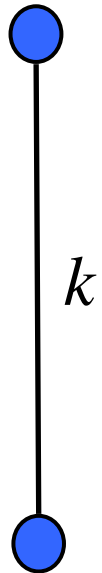
■ P-Knoten-Reduktion



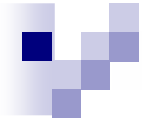


Wie ist eine gewichtete Kante entstanden?

■ S-Knoten-Reduktion

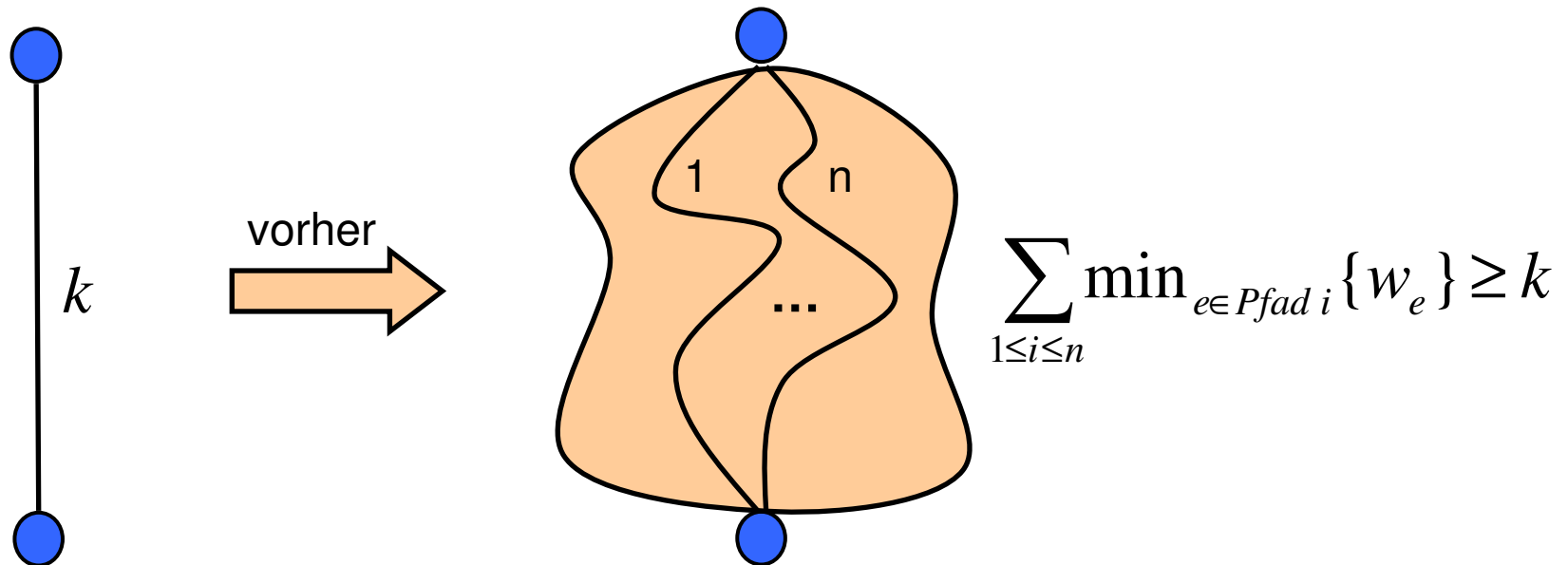


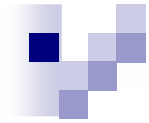
mit $\exists i : w_i = k$
und $\forall j \neq i : w_j \geq w_i$



Wie ist eine gewichtete Kante entstanden?

- (planar) R-Knoten-Reduktion





ENDE