technische universität
dortmund

Einführung in die Programmierung

Wintersemester 2016/17

Prof. Dr. Günter Rudolph

Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Fakultät für Informatik

TU Dortmund

Inhalt

Hashing

- Motivation
- Grobentwurf
- ADT Liste (ergänzen)
- ADT HashTable
- Anwendung

Mergesort

- Konzept
- Laufzeitanalyse
- Realisierung (mit Schablonen)

Motivation

Gesucht: Datenstruktur zum Einfügen, Löschen und Auffinden von Elementen

$\Rightarrow$ Binäre Suchbäume!

Problem: Binäre Suchbäume erfordern eine totale Ordnung auf den Elementen

Totale Ordnung

Jedes Element kann mit jedem anderen verglichen werden:

Entweder a < b oder a > b oder a = b. Beispiele: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, { A, B, …, Z }, …

Partielle Ordnung

Es existieren unvergleichbare Elemente: a || b

Beispiele: $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{R}^3$…

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Idee: durch lexikographische Ordnung total machen! **Aber:** Degenerierte Bäume!

Motivation

Gesucht: Datenstruktur zum Einfügen, Löschen und Auffinden von Elementen

Problem: Totale Ordnung nicht auf natürliche Art vorhanden

Beispiel: Vergleich von Bilddaten, Musikdaten, komplexen Datensätzen

$\Rightarrow$ Lineare Liste!

Funktioniert, jedoch mit ungünstiger Laufzeit:

1. Feststellen, dass Element nicht vorhanden: N Vergleiche auf Gleichheit
2. Vorhandenes Element auffinden: im Mittel (N+1) / 2 Vergleiche

(bei diskreter Gleichverteilung)

$\Rightarrow$ Alternative Suchverfahren notwendig! $\Rightarrow$ ***Hashing***

Idee

1. Jedes Element e bekommt einen **numerischen** „Stempel“ h(e), der sich aus dem **Dateninhalt** von e berechnet
2. Aufteilen der Menge von N Elementen in M disjunkte Teilmengen, wobei M die Anzahl der möglichen Stempel ist
   → Elemente mit gleichem Stempel kommen in dieselbe Teilmenge
3. Suchen nach Element e nur noch in Teilmenge für Stempel h(e)

Laufzeit (Annahme: alle M Teilmengen ungefähr gleich groß)

a) Feststellen, dass Element nicht vorhanden: N / M Vergleiche auf Gleichheit

b) Vorhandenes Element auffinden: im Mittel (N / M +1) / 2 Vergleiche

(bei diskreter Gleichverteilung)

⇒ deutliche Beschleunigung!

Grobentwurf

1. Jedes Element e ∈ E bekommt einen **numerischen** „Stempel“ h(e), der sich aus dem **Dateninhalt** von e berechnet

   Funktion h: E → { 0, 1, …, M – 1 } heißt **Hash-Funktion** (*to hash*: zerhacken)

   Anforderung: sie soll zwischen 0 und M – 1 gleichmäßig verteilen

2. Elemente mit gleichem Stempel kommen in dieselbe Teilmenge

   M Teilmengen werden durch M lineare Listen realisiert (ADT Liste),

   Tabelle der Größe M enthält für jeden Hash-Wert eine Liste

3. Suchen nach Element e nur noch in Teilmenge für Stempel h(e)

   Suche nach e → Berechne h(e); h(e) ist Index für Tabelle[h(e)] (vom Typ Liste)

   Suche in dieser Liste nach Element e

Grobentwurf

Weitere Operationen auf der Basis von „Suchen“

- **Einfügen** von Element e

  → Suche nach e in Liste für Hash-Werte h(e)
  Nur wenn e **nicht** in dieser Liste, dann am Ende der Liste einfügen

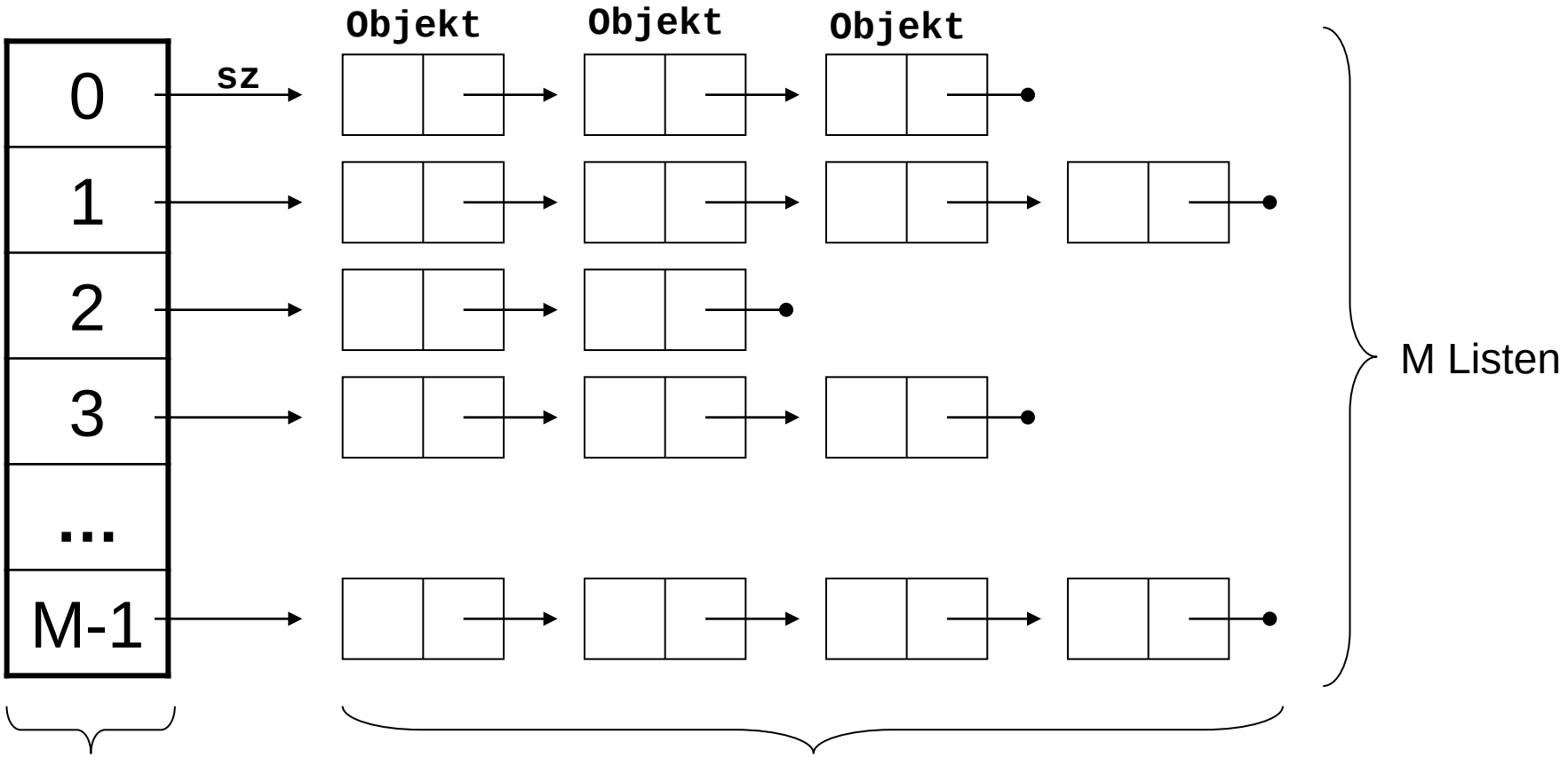
- **Löschen** von Element e

  → Suche nach e in Liste für Hash-Werte h(e)
  Wenn e in der Liste **gefunden** wird, dann aus der Liste entfernen

Auch denkbar: **Ausnahme werfen**, falls

einzufügendes Element schon existiert oder zu löschendes Element nicht vorhanden

Grobentwurf



Was ist zu tun?

1. Wähle Datentyp für die Nutzinformation eines Elements

   $\Rightarrow$ **hier:** realisiert als Schablone!

2. Realisiere den ADT **`Liste`** zur Verarbeitung der Teilmengen

   $\Rightarrow$ Listen kennen und haben wir schon; jetzt nur ein paar Erweiterungen!

3. Realisiere den ADT **`HashTable`**

   $\Rightarrow$ Verwende dazu den ADT **`Liste`** und eine Hash-Funktion

4. Konstruiere eine Hash-Funktion h: E $\rightarrow$ { 0,1, …, M – 1}

   $\Rightarrow$ Kritisch! Wg. Annahme, dass h(·) gleichmäßig über Teilmengen verteilt!

```
template<typename T> class Liste {
public:
  Liste();
  Liste(const Liste& liste);
  void append(const T& x);
  void prepend(const T& x);
  bool empty();
  bool is_elem(const T& x);
  void clear();
  void remove(const T& x);
  void print();
  ~Liste();
protected:
  struct Objekt {
    T      data;
    Objekt *next;
  } *sz, *ez;
  void clear(Objekt *obj);
  Objekt* remove(Objekt *obj, const T& x);
  void print(Objekt *obj);
};
```

ADT Liste

öffentliche Methoden, z.T. überladen

privater lokaler Datentyp

private rekursive Funktionen

ADT Liste

```
template<typename T> Liste<T>::Liste()
: sz(nullptr), ez(nullptr) {
}
```

Konstruktor

```
template<typename T> Liste<T>::~Liste() {
  clear();
}
```

Destruktor

```
template<class T> void Liste<T>::clear() {
  clear(sz);
  sz = ez = nullptr;
}
```

public clear : gibt Speicher frei, initialisiert zu leerer Liste

```
template<typename T>
void Liste<T>::clear(Objekt *obj) {
  if (obj == nullptr) return;
  clear(obj->next);
  delete obj;
}
```

private Hilfsfunktion von ***public clear***

löscht Liste rekursiv!

ADT Liste

öffentliche Methode:

```
template<typename T> void Liste<T>::remove(const T& x){
  sz = remove(sz, x); if(sz == nullptr)ez = nullptr;
}
```

private überladene Methode:

```
template<typename T>
Liste<T>::Objekt* Liste<T>::remove(Objekt *obj, const T& x) {
  if (obj == nullptr) return nullptr; // oder: Ausnahme!
  if (obj->data == x) {
    Objekt *tmp = obj->next;          // Zeiger retten
    delete obj;                       // Objekt löschen
    return tmp;                       // Zeiger retour
  }
  obj->next = remove(obj->next, x);   // Rekursion
  if (obj->next == nullptr) ez = obj;
  return obj;
}
```

ADT Liste

öffentliche Methode:

```
template<typename T> void Liste::print() {
  print(sz);
}
```

private überladene Methode:

```
template<typename T>
void Liste::print(Objekt *obj) {
  static int cnt = 1;      // counter
  if (obj != nullptr) {
    cout << obj->data;
    cout << (cnt++ % 6 ? "\t" : "\n");
    print(obj->next);
  }
  else {
    cnt = 1;
    cout << "(end of list)" << endl;
  }
}
```

← Speicherklasse **`static`**: Speicher wird nur einmal angelegt

ADT HashTable

```
template<typename T> class HashTable {
private:
  Liste<T> *table;
  unsigned int maxBucket;
public:
  HashTable(int aMaxBucket);
  virtual int Hash(T& aElem) = 0;        // rein virtuell!
  bool Contains(T& aElem) {
    return table[Hash(aElem)].is_elem(aElem); }
  void Delete(T& aElem) {
    table[Hash(aElem)].remove(aElem); }
  void Insert(T& aElem) {
    table[Hash(aElem)].append(aElem); }
  void Print();
  ~HashTable();
};
```

ADT HashTable

```
template<typename T>
HashTable<T>::HashTable(int aMaxBucket):maxBucket(aMaxBucket) {
  if (maxBucket < 2) throw "invalid bucket size";
  table = new Liste<T>[maxBucket];
}

template<typename T>
HashTable<T>::~HashTable() {
  delete[] table;
}

template<typename T>
void HashTable<T>::Print() {
  for (unsigned int i = 0; i < maxBucket; i++) {
    cout << "\nBucket " << i << " :\n";
    table[i].print();
  }
}
```

ADT HashTableInt

```
class HashTableInt : public HashTable<int> {
public:
  int Hash(int& aElem) { return aElem % maxBucket; }
}
```

ADT HashTable

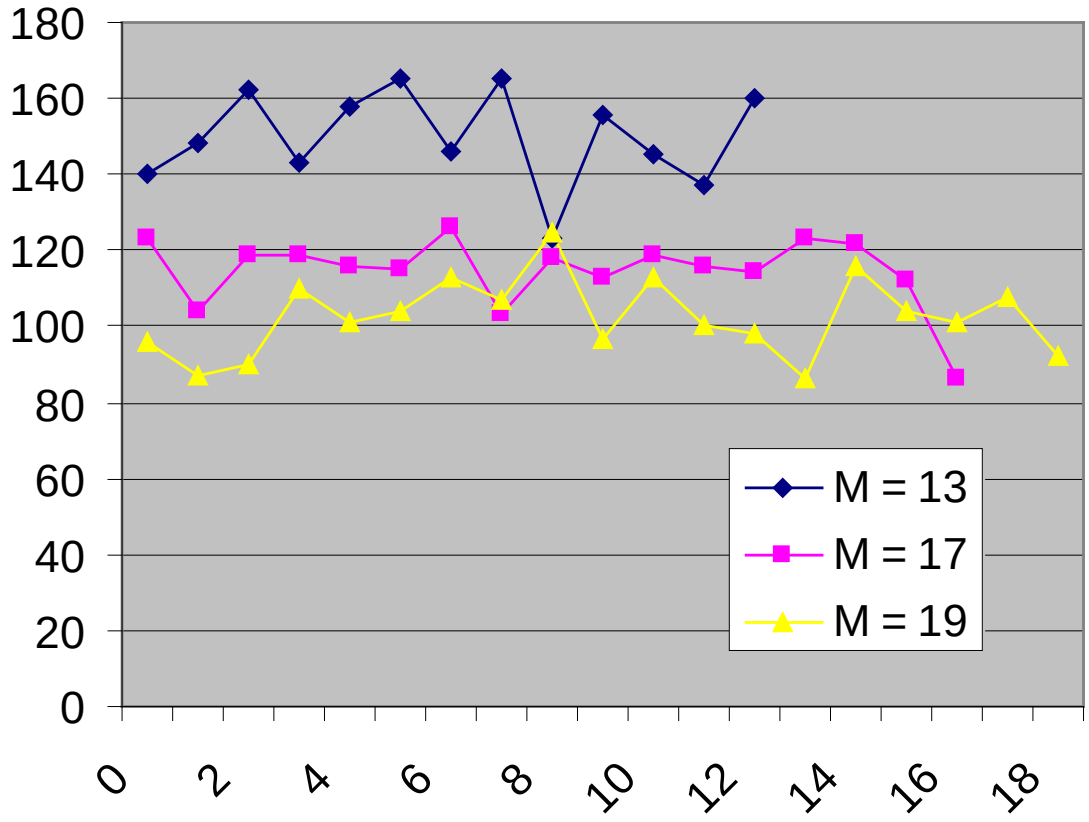
```
int main() {
  unsigned int maxBucket = 17;
  HashTableInt ht(maxBucket);
  for (int i = 0; i < 2000; i++) ht.Insert(rand());

  int hits = 0;
  for (int i = 0; i < 2000; i++)
    if (ht.Contains(rand())) hits++;

  cout << "Treffer: " << hits << endl;

  return 0;
}
```

`unsigned int`
Pseudozufallszahlen

Ausgabe: **`Treffer: 137`**

Achtung! Das Ergebnis erhält man nur unter Verwendung der schlecht realisierten Bibliotheksfunktion rand() von MS Windows. Unter Linux: 0.

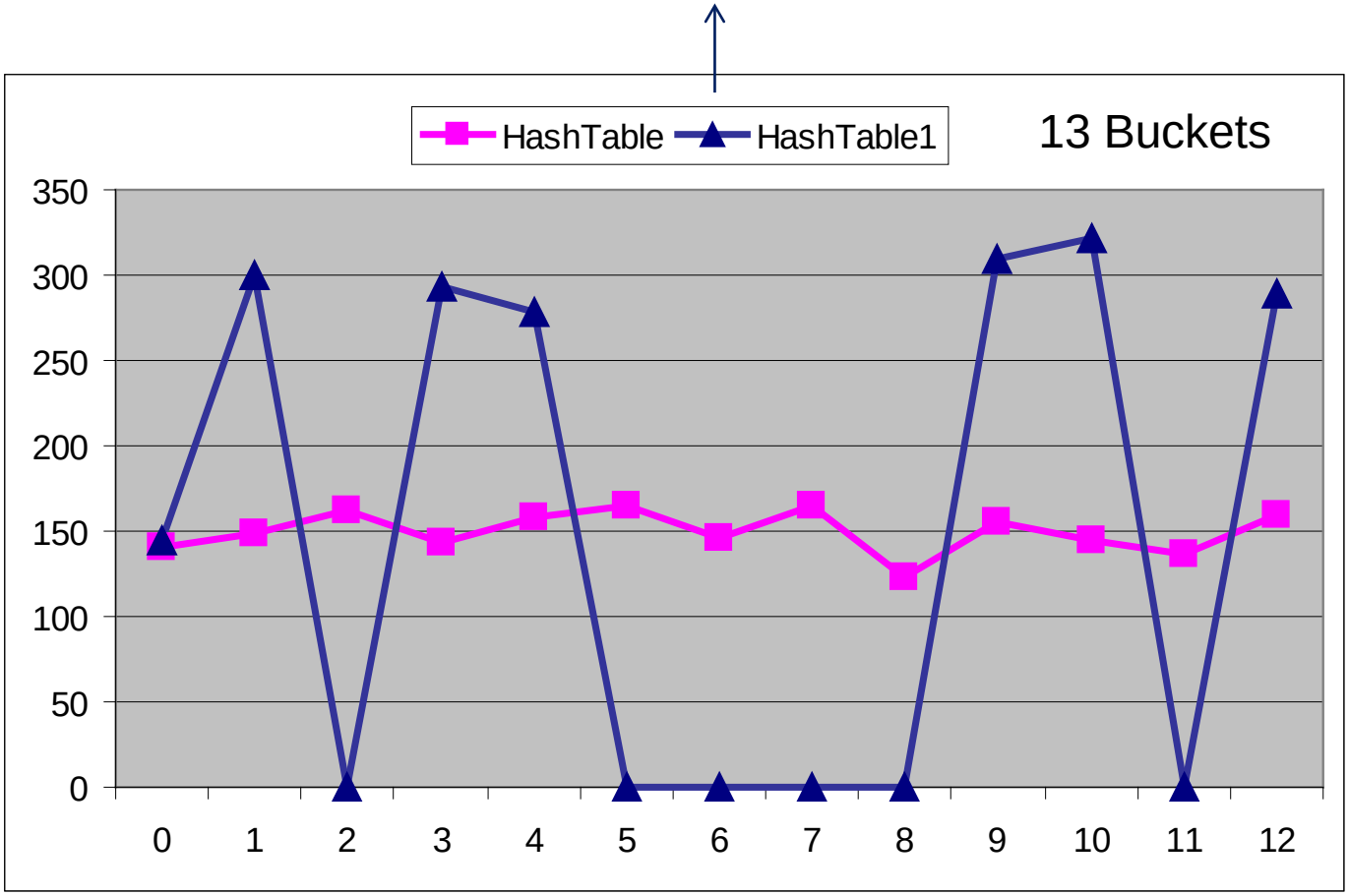
ADT HashTable: Verteilung von 2000 Zahlen auf M Buckets



M	Mittel-wert	Std.-Abw.
13	149	13,8
17	114	8,1
19	102	6,7

$\Rightarrow$ Hash-Funktion ist wohl OK

```
int Hash(T aElem) { return (aElem * aElem) % maxBucket; }
```



⇒ Gestalt der Hashfunktion ist von Bedeutung für Listenlängen!

Graphische Anwendung: Vektoren $(x_1,x_2,x_3) \in [a, b] \subset \mathbb{N}^3$ wiederfinden

$$H(x) = \left\lfloor C \cdot \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot (x_i - a_i) \right\rfloor \bmod M$$

wobei $\lambda_i > 0$ und $C = \dfrac{2^{32}-1}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot (b_i - a_i)}$

- $2^{32}-1$: max. Zahlenbereich
- $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot (b_i - a_i)$: max. Summenwert

Falls $M = 2^k$ für $(k < 32)$,
dann Modulo-Operation schnell durch logisches AND berechenbar:

```
Hash = floor( C * sum(x) ) & (M-1)
```

Aufgabe: Texte wiederfinden

Problem: ungleichmäßige Verteilung von Worten und Buchstabengruppen

$\Rightarrow$ alle n Zeichen der Zeichenkette x einbeziehen

$$H_i = \begin{cases} x_1 & \text{, falls } i = 1 \\ (\lambda \cdot H_{i-1} + x_i) \bmod M & \text{, falls } i > 1 \end{cases}$$

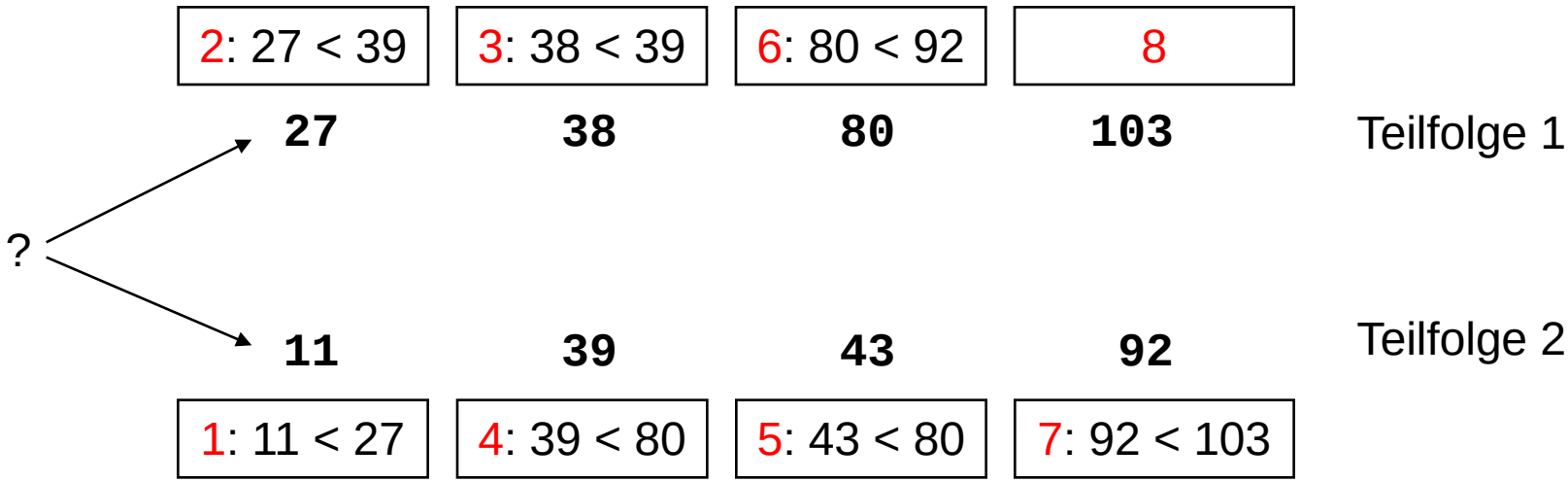
„Rolling Hash“

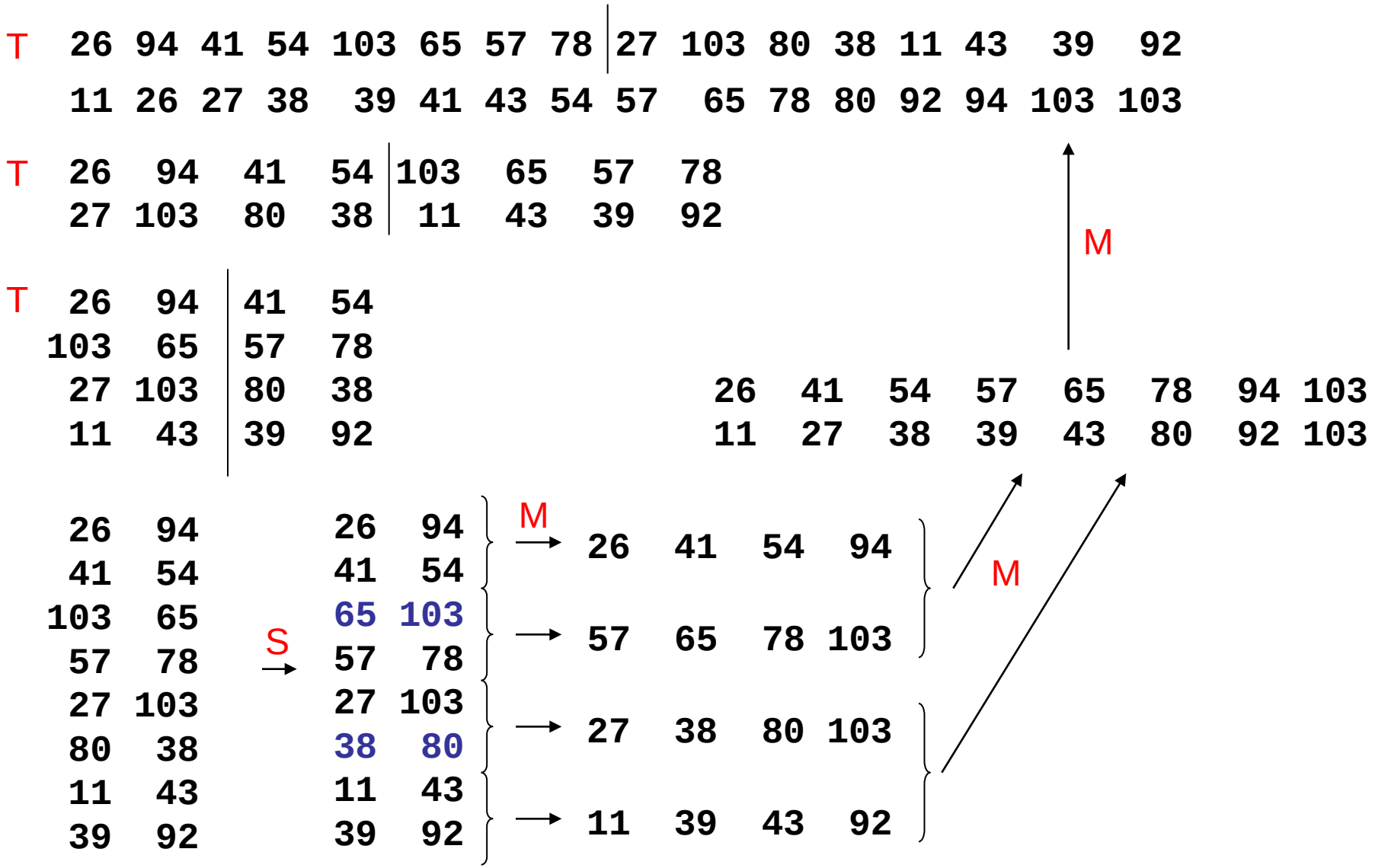
H_n ist der Hashwert der Zeichenkette x mit n Zeichen

Mergesort

Beobachtung:

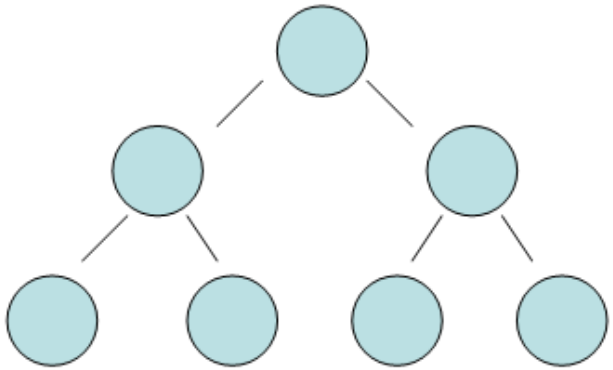
Sortieren ist einfach, wenn man zwei sortierte Teilfolgen hat.




T 26 94 41 54 103 65 57 78 27 103 80 38 11 43 39 92
11 26 27 38 39 41 43 54 57 65 78 80 92 94 103 103
T 26 94 41 54 103 65 57 78
27 103 80 38 11 43 39 92
M
T 26 94 41 54
103 65 57 78
27 103 80 38
11 43 39 92
26 41 54 57 65 78 94 103
11 27 38 39 43 80 92 103
26 94
41 54
103 65
57 78
27 103
80 38
11 43
39 92
S
26 94
41 54
65 103
57 78
27 103
38 80
11 43
39 92
M
26 41 54 94
57 65 78 103
27 38 80 103
11 39 43 92
M

Laufzeitanalyse

Annahme: Anzahl Objekte $n = 2^k \Leftrightarrow k = \log_2 n$



2^0 Teilsequenzen — 2^k Objekte je Teilsequenz

2^1 Teilsequenzen — 2^{k-1} Objekte je Teilsequenz

2^2 Teilsequenzen — 2^{k-2} Objekte je Teilsequenz

⋮ ⋮

2^{k-1} Teilsequenzen — $\underbrace{2^{k-(k-1)}}_{=2}$ Objekte je Teilsequenz

(a) 2^{k-1} Vergleiche zum Sortieren der 2^{k-1} Paare

(b) auf Ebene e: $(2^{k-e}-1)$ Vergleiche zum Mischen von 2 der 2^e Sequenzen

$\Rightarrow (2^{k-e}-1) * 2^{e-1} = 2^{k-1} - 2^{e-1}$ Vergleiche auf Ebene e = 1, …, k-1

$\Rightarrow 2^{k-1} + (k-1)*2^{k-1} - \text{Summe}(2^{e-1}; 1..k-1) = (k-1)*2^{k-1}+1 < k*2^k = n \log_2 n$

Mergesort

- Eingabe: unsortiertes Feld von Zahlen
- Ausgabe: sortiertes Feld
- Algorithmisches Konzept: „Teile und herrsche“ (*divide and conquer*)
  - Zerlege Problem solange in Teilprobleme bis Teilprobleme lösbar
  - Löse Teilprobleme
  - Füge Teilprobleme zur Gesamtlösung zusammen

Hier:

1. Zerteile Feld in Teilfelder bis Teilproblem lösbar (→ bis Feldgröße = 2)
2. Sortiere Felder der Größe 2 (→ einfacher Vergleich zweier Zahlen)
3. Füge sortierte Teilfelder durch Mischen zu sortierten Feldern zusammen

Mergesort

- Programmentwurf

Annahme:

Feldgröße ist
Potenz von 2

1. Teilen eines Feldes → einfach!

2. Sortieren

   a) eines Feldes der Größe 2 → einfach!

   b) eines Feldes der Größe > 2 → rekursiv durch Teilen & Mischen

3. Mischen → nicht schwer!

Mergesort: Version 1

```
void Msort(int const size, int a[]) {
  if (size == 2) {  // sortieren
    if (a[0] > a[1]) Swap(a[0], a[1]);
    return;
  }
  // teilen
  int k = size / 2;
  Msort(k, &a[0]);
  Msort(k, &a[k]);
  // mischen
  Merge(k, &a[0], &a[k]);
}
```

sortieren (einfach)

sortieren durch Teilen & Mischen

```
void Swap(int& a, int& b) {
  int c = b; b = a; a = c;
}
```

Werte vertauschen per Referenz

Mergesort: Version 1

```
void Merge(int const size, int a[], int b[]) {
  int* c = new int[2*size];

  // mischen
  int i = 0, j = 0;
  for (int k = 0; k < 2 * size; k++)
    if ((j == size) || (i < size && a[i] < b[j]))
      c[k] = a[i++];
    else
      c[k] = b[j++];

  // umkopieren
  for (int k = 0; k < size; k++) {
    a[k] = c[k];
    b[k] = c[k+size];
  }
  delete[] c;
}
```

dynamischen Speicher anfordern

dynamischen Speicher freigeben

Mergesort: Version 1

```
void Print(int const size, int a[]) {
  for (int i = 0; i < size; i++) {
    cout << a[i] << "\t";
    if ((i+1) % 8 == 0) cout << endl;
  }
  cout << endl;
}

int main() {
  int const size = 32;
  int a[size];

  for (int k = 0; k < size; k++) a[k] = rand();

  Print(size, a);
  Msort(size, a);
  Print(size, a);

  return 0;
}
```

Hilfsfunktion für Testprogramm

Programm zum Testen

Mergesort: Version 1

Ausgabe:

```
41      18467   6334    26500   19169   15724   11478   29358
26962   24464   5705    28145   23281   16827   9961    491
2995    11942   4827    5436    32391   14604   3902    153
292     12382   17421   18716   19718   19895   5447    21726

41      153     292     491     2995    3902    4827    5436
5447    5705    6334    9961    11478   11942   12382   14604
15724   16827   17421   18467   18716   19169   19718   19895
21726   23281   24464   26500   26962   28145   29358   32391
```

OK, funktioniert für **`int`** … was ist mit **`char, float, double`** … ?

⇒ **Idee:** Schablonen!

Mergesort: Version 2

```
template <class T> void Msort(int const size, T a[]) {
  if (size == 2) {  // sortieren
    if (a[0] > a[1]) Swap<T>(a[0], a[1]);
    return;
  }
  // teilen
  int k = size / 2;
  Msort<T>(k, &a[0]);
  Msort<T>(k, &a[k]);
  // mischen
  Merge<T>(k, &a[0], &a[k]);
}
```

```
template <class T> void Swap(T& a, T& b) {
      T c = b; b = a; a = c;
}
```

Mergesort: Version 2

```
template <class T> void Merge(int const size, T a[], T b[]) {
  T* c = new T[2*size];

  // mischen
  int i = 0, j = 0;
  for (int k = 0; k < 2 * size; k++) {
    if ((j == size) || (i < size && a[i] < b[j]))
      c[k] = a[i++];
    else
      c[k] = b[j++];

  // umkopieren
  for (int k = 0; k < size; k++) {
    a[k] = c[k];
    b[k] = c[k+size];
  }
  delete[] c;
}
```

Mergesort: Version 2

```
template <class T> void Print(int const size, T a[]) { … }
```

```
int main() {
  int const size = 32;

  int a[size];
  for (int k = 0; k < size; k++) a[k] = rand();
  Print<int>(size, a);
  Msort<int>(size, a);
  Print<int>(size, a);

  float b[size];
  for (int k = 0; k < size; k++) b[k] = rand() * 0.01f;
  Print<float>(size, b);
  Msort<float>(size, b);
  Print<float>(size, b);

  return 0;
}
```

Konstante vom Typ **`float`** (nicht **`double`**)

Mergesort: Version 2

Ausgabe:

```
41      18467   6334    26500   19169   15724   11478   29358
26962   24464   5705    28145   23281   16827   9961    491
2995    11942   4827    5436    32391   14604   3902    153
292     12382   17421   18716   19718   19895   5447    21726

41      153     292     491     2995    3902    4827    5436
5447    5705    6334    9961    11478   11942   12382   14604
15724   16827   17421   18467   18716   19169   19718   19895
21726   23281   24464   26500   26962   28145   29358   32391


147.71  115.38  18.69   199.12  256.67  262.99  170.35  98.94
287.03  238.11  313.22  303.33  176.73  46.64   151.41  77.11
282.53  68.68   255.47  276.44  326.62  327.57  200.37  128.59
87.23   97.41   275.29  7.78    123.16  30.35   221.9   18.42

7.78    18.42   18.69   30.35   46.64   68.68   77.11   87.23
97.41   98.94   115.38  123.16  128.59  147.71  151.41  170.35
176.73  199.12  200.37  221.9   238.11  255.47  256.67  262.99
275.29  276.44  282.53  287.03  303.33  313.22  326.62  327.57
```

Mergesort: Version 2

Schablone instantiiert mit Typ **`string`** funktioniert auch!

Schablone instantiiert mit Typ **`Complex`** funktioniert nicht! Warum?

Vergleichsoperatoren sind nicht überladen für Typ **`Complex`**!

in **`Msort`**:
```
if (a[0] > a[1]) Swap<T>(a[0], a[1]);
```

in **`Merge`**:
```
if ((j == size) || (i < size && a[i] < b[j]))
```

Entweder Operatoren überladen oder überladene Hilfsfunktion (z.B. **`Less`**):

```
bool Less(Complex &x, Complex &y) {
  if (x.Re() < y.Re()) return true;
  return (x.Re() == y.Re() && x.Im() < y.Im());
}
```

hier: lexikographische Ordnung