UNIVERSITÄT DORTMUND

Wintersemester 2005/06

Fundamente der Computational Intelligence

(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph
Fachbereich Informatik
Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Kapitel 3: Evolutionäre Algorithmen

Inhalt

- PBIL & Co.
- Differentialevolution
- Genetic Programming

Kapitel 3: Evolutionäre Algorithmen: PBIL & Co.

PBIL: Population-Based Incremental Learning

- Baluha & Caruana (1995), Conference on Machine Learning
- Suchraum $\mathbb{B}^n$, Minimierung pseudo-boolescher Funktionen
- Population X mit μ Individuen

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \cdots & x_{\mu n} \end{pmatrix}$$

Individuum 1
Individuum 2
⋮
Individuum μ

Genpool 1 Genpool 2 ... Genpool n

$$p_j = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} x_{ij}$$

Kapitel 3: Evolutionäre Algorithmen: PBIL & Co.

Genpool-Rekombination:

Ziehe Gen j für Nachkomme Y gleichverteilt von Komponente j aller Individuen

⇕

Setze Gen j für Nachkomme Y auf 1 mit W'keit $p_j = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} x_{ij}$, sonst auf 0

⇒ Population charakterisiert durch Verteilungen p = (p_1, p_2, …, p_n)

Grundidee der Evolutionsschleife:

1. Generiere λ Nachkommen durch Genpool-Rekombination gemäß p
2. Selektiere μ beste Nachkommen als neue Eltern
3. Aktualisiere p gemäß Genpools der neuen Eltern

Seien $y_{1:\lambda}, y_{2:\lambda}, \ldots, y_{\lambda:\lambda}$ die λ sortierten Nachkommen mit

$$f(y_{1:\lambda}) \leq f(y_{2:\lambda}) \leq \cdots \leq f(y_{\lambda:\lambda})$$

Setze $p^{(0)} = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ und $k = 0$
repeat
  Erzeuge λ Nachkommen y_i gem $p^{(k)}$
  Sortiere y_i gemäß ihrer Güte
  $p^{(k+1)} = (1-\alpha)\, p^{(k)} + \alpha \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\mu} y_{k:\lambda}^{(k)}$
until Terminierungsregel erfüllt

$\alpha \in (0,1)$

Achtung!

Aktualisierungsregel $p^{(k+1)} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} y_{i:\lambda}^{(k)}$ problematisch!
($\alpha = 1$)

$\Rightarrow$ kann zu jedem p $\in \mathbb{B}^n$ führen (durch unglückliches Ziehen)

Analyse:

- Kvasnicka et al. (1995): 1-dimensional, deterministisch
- Rudolph & Höhfeld (1997): Spezialfall $\mu = 1$
- Gonzalez et al. (2001): 2-dimensional, leider falsch!
- ???

Analyse (Höhfeld & Rudolph 1997)

Aktualisierung: $p^{(k+1)} = (1-\alpha)\, p^{(k)} + \alpha\, b^{(k)}$

wobei $b^{(k)} = y_{1:\lambda}^{(k)}$, $\alpha \in (0,1)$, $p_i^{(0)} = \frac{1}{2}$.

Ziel:

Wir suchen Grenzwert $p^{(\infty)}$ der stochastischen Folge $(p^{(k)} : k \geq 0)$!

Vorüberlegung:

p ist beschränkt, also Konvergenz in W'keit = Konvergenz im Mittel

also: $\lim_{k\to\infty} E[p^{(k)}] = x \in \{0,1\}^n$ **?**

$$\mathrm{E}[\, p^{(t+1)} \,|\, p^{(t)} \,] = (1-\alpha)\, p^{(t)} + \alpha \underbrace{\mathrm{E}[\, b^{(t)} \,|\, p^{(t)} \,]}_{?}$$

$$\mathrm{E}[\, b \,|\, p \,] = \sum_{x \in \{0,1\}^n} x \cdot \underbrace{\mathrm{P}\{\, b = x \,\}}_{?}$$

$$\mathrm{P}\{\, b = x \,\} =$$

$$\mathrm{P}\{\, s = x \,\} \sum_{i=0}^{\lambda-1} \mathrm{P}\{\, f(s) > f(x) \,\}^i \cdot \mathrm{P}\{\, f(s) \geq f(x) \,\}^{\lambda-1-i}$$

$$\mathrm{P}\{ s = x \} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{1 - x_i}$$

$$\mathrm{P}\{ f(s) = f(x) \} = \sum_{\substack{y \in \{0,1\}^n \\ f(y) = f(x)}} \mathrm{P}\{ s = y \}$$

$$\mathrm{P}\{ f(s) > f(x) \} = \sum_{\substack{y \in \{0,1\}^n \\ f(y) > f(x)}} \mathrm{P}\{ s = y \}$$

Beispiel: n = 2, $\lambda = 2$, $f(x) = \sum_i x_i \rightarrow$ min! (counting ones)

$$\mathrm{P}\left\{ b = \binom{0}{0} \right\} = 1 - (p_1 + p_2 - p_1 p_2)^2$$

$$\mathrm{P}\left\{ b = \binom{0}{1} \right\} = (1 - p_1)\, p_2\, (p_1 + p_2)$$

$$\mathrm{P}\left\{ b = \binom{1}{0} \right\} = p_1\, (1 - p_2)\, (p_1 + p_2)$$

$$\mathrm{P}\left\{ b = \binom{1}{1} \right\} = (p_1\, p_2)^2$$

$$\mathrm{E}[\, b \,|\, p \,] := F_2(p) = \begin{pmatrix} p_1\,(1 - p_2)\,(p_1 + p_2) + (p_1\, p_2)^2 \\ p_2\,(1 - p_1)\,(p_1 + p_2) + (p_1\, p_2)^2 \end{pmatrix}$$

Vektorfeld der Abbildung $F_2(p)$

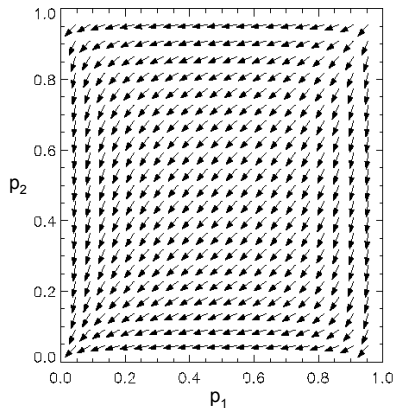
augenscheinlich: $F_2(p) < p$

Interpretation:

Unabhängig vom Startwert $p^{(0)}$ und unabhängig von aktueller Position $p^{(k)}$ hat $E[p^{(k+1)}]$ eine Tendenz in Richtung Optimum.

bzw.

$E[p^{(k)}] \xrightarrow{\text{i.M.}} x^*$ für $k \rightarrow \infty$



Satz:

Sei $f(x) = c'\, x$ eine lineare pseudo-boolesche Funktion, die zu minimieren ist. Für $c_i < 0$ gilt $E[\, b_i \,|\, p \,] > p_i$, für $c_i > 0$ gilt $E[\, b_i \,|\, p \,] < p_i$, wobei b das selektierte beste Individuum ist.

Daraus folgt: PBIL konvergiert im Mittel zum Optimum linearer Funktionen.

Beweis: (Rudolph & Höhfeld 1997, S. 3f) ■

→ Lineare Funktionen sind einfach! (1+1)-EA braucht i.M. O(n log n) Schritte.

→ Ähnliches Resultat für nichtlineare Funktionen?

Kapitel 3: Evolutionäre Algorithmen: PBIL & Co.

→ Wenn Beweise nicht gelingen wollen, dann Gegenbeispiel finden!

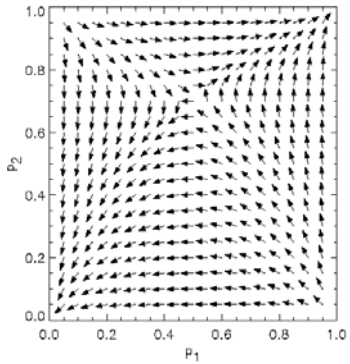
$f(00) < f(11) < f(01) < f(10)$

z. B. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 - 4x_1x_2$

Interpretation:

Abhängig vom Startwert $p^{(0)}$ Tendenz zum lokalen oder globalen Optimum!

Kein globales Verfahren!



Kapitel 3: Evolutionäre Algorithmen: Differentialevolution

- Price (1996) + Storn (1996)
- (μ + μ)-EA mit speziellem Variationsoperator

initialisiere μ Individuen $P = (X_1, X_2, \ldots, X_\mu)$
repeat
  `Q = ( )` // leere Liste
  foreach Individuum $x \in P$:
    wähle 3 Individuen $\neq x$ aus P ohne Zurücklegen // `ergibt (a,b,c)`
    `y = Variation(x, a, b, c)`
    if $f(y) < f(x)$ **then** `Q.add(y)` **else** `Q.add(x)`
  endfor
  `P = Q`
until Terminierung

Kapitel 3: Evolutionäre Algorithmen: Differentialevolution

```
Variation(x, a, b, c) =
  wähle gleichverteilt ein j aus {1, 2, …, n}
  for i = 1 to n
    if i = j or mit W'keit p:
      y_i = a_i + α(b_i – c_i)
    else
      y_i = x_i
  endfor
  return y
```

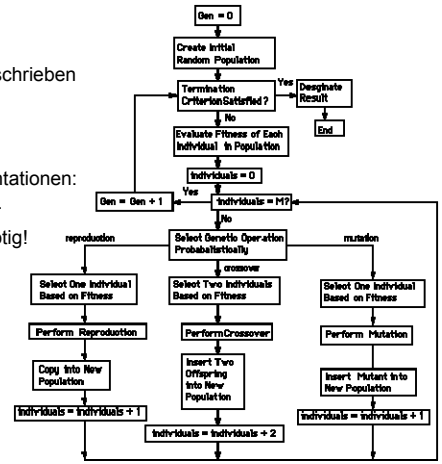
p: Rekombinationsrate
$\alpha \in (0,1)$

Problem:

Der kleinste Hyperquader, der die initiale Population beinhaltet, kann nicht verlassen werden!

Kapitel 3: Evolutionäre Algorithmen: Genetic Programming

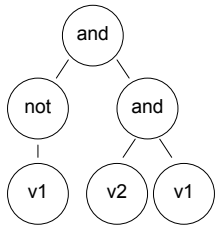
- entstanden im GA-Umfeld
- wird meist Koza (1989) zugeschrieben
- Evolution von Programmen
- Suchraum S: Syntaxbäume
- später auch andere Repräsentationen: z.B. Assembler, binary GP, …
- neue Variationsoperatoren nötig!

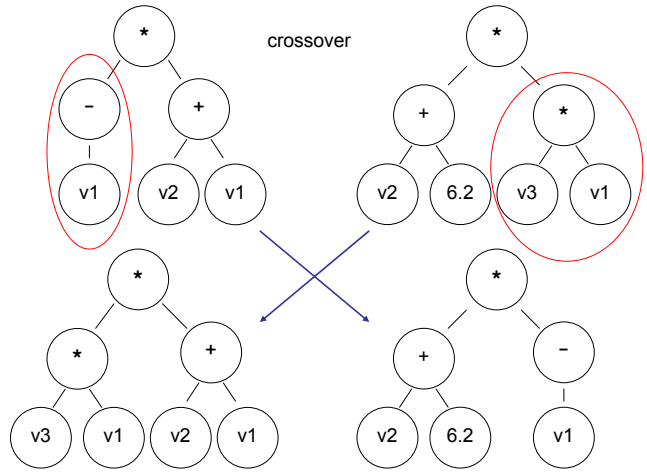


Klasse `tree`

Methoden:

```
createTree()
delete(node)
getSubtree(node)
insertTreeAt(node, tree)
contains(node)
size()
...
```





Mutation:

- Ersetzen eines Teilbaums durch zufälligen Baum
- Nur Konstanten werden verändert (keine Operationen)
- Wird eher selten eingesetzt
  → meistens riesige Populationen nur mit Crossover

Typische Anwendung

Symbolische Regression (Evolvieren einer Formel)

Theorie

sehr junges Feld (> 2000), Poli et al.
Schema-Theorie genannt, ist aber i.W. Markoff-Theorie