Wintersemester 2006/07

Fundamente der Computational Intelligence

(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph

Fachbereich Informatik

Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Inhalt

- Fuzzy Mengen ☑
- Fuzzy Relationen ☑
- Fuzzy Logik ☑
- Approximatives Schließen
- Fuzzy Regelung

Approximatives Schließen

Bisher:

- p: IF *X* ist A THEN *Y* ist B

  → R(x, y) = Imp(A(x), B(y))   Regel als Relation; Fuzzy Implikation

- Regel: IF *X* ist A THEN *Y* ist B
  Fakt: *X* ist A‘
  Folgerung: *Y* ist B‘

  → $B'(y) = \sup_{x \in X} t(A'(x), R(x, y))$ Kompositionsregel der Inferenz

Also:

- $B'(y) = \sup_{x \in X} t(A'(x), \mathrm{Imp}(A(x), B(y)))$

Approximatives Schließen

Hier:

$$A'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\boxed{\text{scharfe Eingabe!}}$

$$B'(y) = \sup_{x \in X} t(\, A'(x), \mathrm{Imp}(\, A(x), B(y)\,)\,)$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{x \neq x_0} t(\, 0, \mathrm{Imp}(\, A(x), B(y)\,)\,) & \text{für } x \neq x_0 \\ t(\, 1, \mathrm{Imp}(\, A(x_0), B(y)\,)\,) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 & \text{da } t(0, a) = 0 \\ \mathrm{Imp}(\,(\, A(x_0), B(y)\,) & \text{für } x = x_0 & \text{da } t(a, 1) = a \end{cases}$$

Approximatives Schließen

Lemma:

a) $t(a, 1) = a$

b) $t(a, b) \leq \min \{ a, b \}$

c) $t(0, a) = 0$

Beweis:

wg. a)

ad a) Identisch zu Axiom 1 für t-Normen.

ad b) Aus Monotonie (Axiom 2) folgt für $b \leq 1$, dass $t(a, b) \leq t(a, 1) = a$.
Wg. Kommutativität aus Axiom 3 und Monotonie folgt für $a \leq 1$, dass $t(a, b) = t(b, a) \leq t(b, 1) = b$. Also ist $t(a, b)$ sowohl kleiner oder gleich a als auch b, woraus sofort $t(a, b) \leq \min \{ a, b \}$ folgt.

ad c) Mit b) folgt $0 \leq t(0, a) \leq \min \{ 0, a \} = 0$ und damit $t(0, a) = 0$. ■

Mehrere Regeln:

IF X ist A_1, THEN Y ist B_1	$\to R_1(x, y) = \text{Imp}_1(\, A_1(x), B_1(y)\,)$
IF X ist A_2, THEN Y ist B_2	$\to R_2(x, y) = \text{Imp}_2(\, A_2(x), B_2(y)\,)$
IF X ist A_3, THEN Y ist B_3	$\to R_3(x, y) = \text{Imp}_3(\, A_3(x), B_3(y)\,)$
…	…
IF X ist A_n, THEN Y ist B_n	$\to R_n(x, y) = \text{Imp}_n(\, A_n(x), B_n(y)\,)$
X ist A‘	

Y ist B‘

Mehrere Regeln bei <u>scharfer Eingabe</u>: x_0 gegeben

$$\left.\begin{array}{l} B_1'(y) = \text{Imp}_1(A_1(x_0), B_1(y)\,) \\ \dots \\ B_n'(y) = \text{Imp}_n(A_n(x_0), B_n(y)\,) \end{array}\right\}$$

Aggregation der Teilregeln bzw. lokalen Inferenzen notwendig!

Aggregieren! $\Rightarrow$ $B'(y) = \textbf{aggr}\{\, B_1'(y), \dots, B_n'(y)\,\}$, wobei $\textbf{aggr} = \begin{cases} \min \\ \max \end{cases}$

FITA: “**F**irst **i**nference, **t**hen **a**ggregate!“

1. Jede Regel der Form IF *X* ist A_k THEN *Y* ist B_k durch geeignete Wahl einer unscharfen Implikation $Imp_k(\cdot, \cdot)$ in Relation R_k überführen:
   $R_k(x, y) = Imp_k(A_k(x), B_k(y))$.
2. Berechne $B_k'(y) = R_k(x, y) \circ A'(x)$ für alle k = 1, …, n (lokale Inferenz).
3. Aggregiere zu $B'(y) = \beta(B_1'(y), \ldots, B_n'(y))$.

FATI: “**F**irst **a**ggregate, **t**hen **i**nference!“

1. Jede Regel der Form IF *X* ist A_k THEN *Y* ist B_k durch geeignete Wahl einer unscharfen Implikation $Imp_k(\cdot, \cdot)$ in Relation R_k überführen:
   $R_k(x, y) = Imp_k(A_k(x), B_k(y))$.
2. Aggregiere $R_1, \ldots, R_n$ zu einer **Superrelation** mit Aggregierungsfkt. α**(·):**
   $R(x, y) = \alpha(R_1(x, y), \ldots, R_n(x, y))$.
3. Berechne $B'(y) = R(x, y) \circ A'(x)$ bzgl. Superrelation (Inferenz).

1. **Welches Prinzip ist besser? FITA oder FATI?**

2. **Äquivalenz von FITA und FATI ?**

FITA:
$$B'(y) = \beta(\, B_1'(y), \ldots, B_n'(y) \,)$$
$$= \beta(\, R_1(x, y) \circ A'(x), \ldots, R_n(x, y) \circ A'(x) \,)$$

FATI:
$$B'(y) = R(x, y) \circ A'(x)$$
$$= \alpha(\, R_1(x, y), \ldots, R_n(x, y) \,) \circ A'(x)$$

Spezialfall:

$$A'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

scharfe Eingabe!

Zur Äquivalenz von FITA und FATI:

FITA: $B'(y) = \beta(\, B_1'(y), \ldots, B_n'(y)\,)$

$= \beta(\, Imp_1(A_1(x_0), B_1(y)\,), \ldots, Imp_n(A_n(x_0), B_n(y)\,)\,)$

FATI: $B'(y) = R(x, y) \circ A'(x)$

$= \sup_{x \in X} t(\, A'(x), R(x, y)\,)$ (ab jetzt: Spezialfall)

$= R(x_0, y)$

$= \alpha(\, Imp_1(\, A_1(x_0), B_1(y)\,), \ldots, Imp_n(\, A_n(x_0), B_n(y)\,)\,)$

Offensichtlich: sup-t-Komposition mit beliebiger t-Norm und **$\alpha(\cdot) = \beta(\cdot)$**

- **UND-gekoppelte Prämissen**

IF $X_1 = A_{11}$ AND $X_2 = A_{12}$ AND … AND $X_m = A_{1m}$ THEN $Y = B_1$
…
IF $X_n = A_{n1}$ AND $X_2 = A_{n2}$ AND … AND $X_m = A_{nm}$ THEN $Y = B_n$

zusammenfassen zu einer Prämisse je Regel k:

$A_k(x_1, \ldots, x_m) = \min \{ A_{k1}(x_1), A_{k2}(x_2), \ldots, A_{km}(x_m) \}$ oder allgem.: t-Norm

- **ODER-gekoppelte Prämissen**

IF $X_1 = A_{11}$ OR $X_2 = A_{12}$ OR … OR $X_m = A_{1m}$ THEN $Y = B_1$
…
IF $X_n = A_{n1}$ OR $X_2 = A_{n2}$ OR … OR $X_m = A_{nm}$ THEN $Y = B_n$

zusammenfassen zu einer Prämisse je Regel k:

$A_k(x_1, \ldots, x_m) = \max \{ A_{k1}(x_1), A_{k2}(x_2), \ldots, A_{km}(x_m) \}$ oder allgem.: s-Norm

Wichtig:

● Regeln der Form **IF *X* ist A THEN *Y* ist B** aufgefasst als logische Implikationen

● Dann macht $R(x, y) = \text{Imp}(A(x), B(y))$ auch Sinn.

● Wir erhalten: $B'(y) = \sup_{x \in X} t(A'(x), R(x, y))$

$\Rightarrow$ je schlechter Prämisse A'(x) zutrifft, umso größer ist die Fuzzy-Menge B'(y)

$\Rightarrow$ folgt sofort aus Axiom 1: $a \leq b$ impliziert $\text{Imp}(a, z) \geq \text{Imp}(b, z)$

Interpretation der Ausgabemenge B'(y):

● B'(y) ist die Menge der noch möglichen Werte

● einzelne Regel liefert jeweils Einschränkung aller noch möglichen Werte

$\Rightarrow$ resultierende Fuzzy-Mengen $B'_k(y)$ aus Einzelregeln müssen miteinander geschnitten werden!

$\Rightarrow$ Aggregieren via $B'(y) = \mathbf{min}\{ B_1'(y), \ldots, B_n'(y) \}$

Wichtig:

- Werden Regeln der Form **IF *X* ist A THEN *Y* ist B** nicht als logische Implikationen aufgefasst, dann kann die Funktion Fkt(·) in

$$R(x, y) = \text{Fkt}(\, A(x), B(y)\,)$$

wie für gewünschte Interpretation erforderlich gewählt werden.

- Häufige Vertreter (insbesondere in Fuzzy Regelung):

  - $R(x, y) = \min \{ A(x), B(x) \}$ Mamdami - „Implikation“
  - $R(x, y) = A(x) \cdot B(x)$ Larsen – „Implikation“

⇒ Das sind natürlich keine Implikationen sondern spezielle t-Normen!

⇒ Ist also die Relation R(x, y) gegeben,
dann kann durch die *Kompositionsregel der Inferenz*

$$\boxed{B'(y) = A'(x) \circ R(x, y) = \sup_{x \in X} \min \{ A'(x), R(x, y) \}}$$

immer noch mit Hilfe der Fuzzy Logik eine Schlußfolgerung gezogen werden.

<u>Beispiel:</u> [JM96, S. 244ff.]

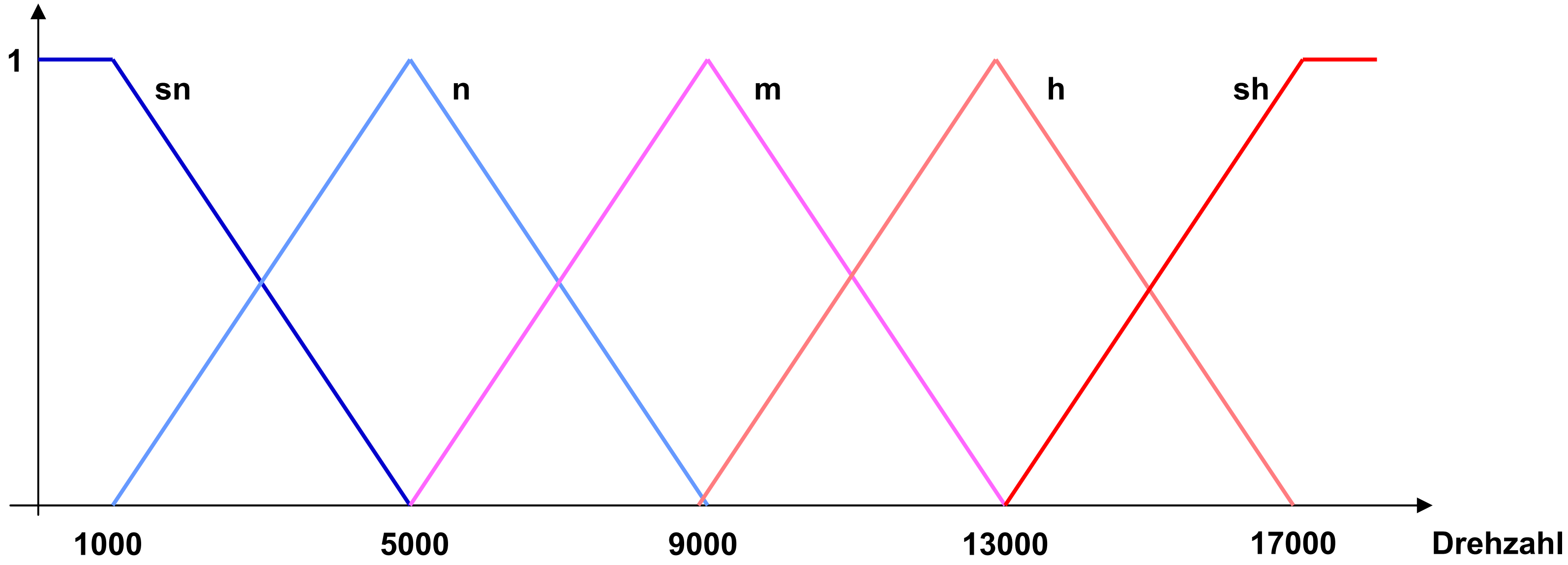
Industrielle Bohrmaschine → Regelung der Kühlmittelzufuhr

<u>Modellierung</u>

Linguistische Variable : **Drehzahl**

Linguistische Terme : ***sehr niedrig***, ***niedrig***, ***mittel***, ***hoch***, ***sehr hoch***

Grundmenge : $\mathcal{X}$ mit $0 \leq x \leq 18000$ [U/min]



Approximatives Schließen

Beispiel: (Fortsetzung)

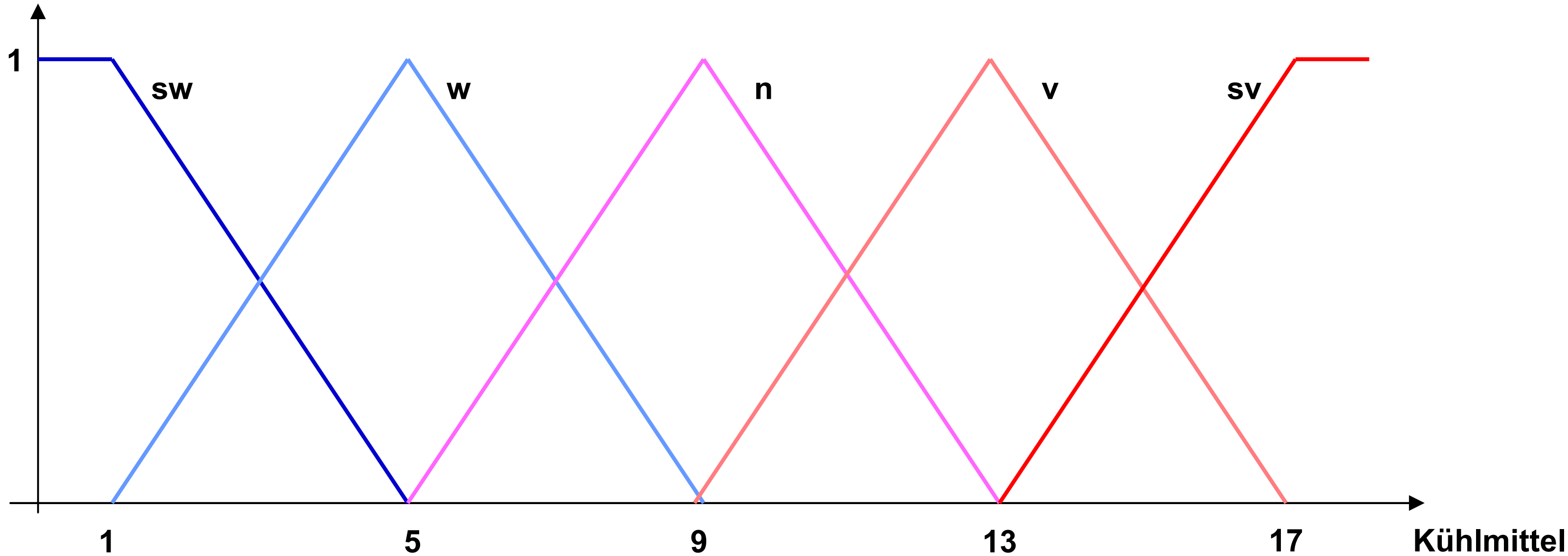
Industrielle Bohrmaschine → Regelung der Kühlmittelzufuhr

Modellierung

Linguistische Variable : **Kühlmittelmenge**

Linguistische Terme : ***sehr wenig***, ***wenig***, ***normal***, ***viel***, ***sehr viel***

Grundmenge : $\mathcal{Y}$ mit $0 \leq y \leq 18$ [Liter/Zeiteinheit]



Approximatives Schließen

Beispiel: (Fortsetzung)

Industrielle Bohrmaschine → Regelung der Kühlmittelzufuhr

Regelbasis

`IF` **Drehzahl** `IS`	***sehr niedig***	`THEN`	**Kühlmittelmenge** `IS`	***sehr wenig***
	niedrig			***wenig***
	mittel			***normal***
	hoch			***viel***
	sehr hoch			***sehr viel***

Beispiel: (Fortsetzung)

Industrielle Bohrmaschine → Regelung der Kühlmittelzufuhr

1. **Eingabe**: scharfer Wert $x_0 = 10000 \text{ min}^{-1}$ (keine Fuzzy-Menge!)

   → **Fuzzyfizierung** = bestimme Zugehörigkeitswert für jede Fuzzy-Menge über $\mathcal{X}$

   → ergibt $D' = (0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ via $x \mapsto (D_{sn}(x_0), D_n(x_0), D_m(x_0), D_h(x_0), D_{sh}(x_0))$

2. FITA: lokale **Inferenz** ⇒ wg. Imp(0,a) = 0 nur zu betrachten:

   D_m: $K'_n(y) = \text{Imp}(\frac{3}{4}, K_n(y))$

   D_h: $K'_v(y) = \text{Imp}(\frac{1}{4}, K_v(y))$

3. **Aggregieren**:

   ?

   $K'(y) = \texttt{aggr} \{ K'_n(y), K'_v(y) \} = \max \{ \text{Imp}(\frac{3}{4}, K_n(y)), \text{Imp}(\frac{1}{4}, K_v(y)) \}$

   ?

Approximatives Schließen

Beispiel: (Fortsetzung)

Industrielle Bohrmaschine → Regelung der Kühlmittelzufuhr

$K'(y) = \max \{ \text{Imp}(¾, K_n(y)), \text{Imp}(¼, K_v(y)) \}$

Bei Regelungsaufgaben keine logikbasierte Interpretation:

→ max-Aggregation und

→ Relation R(x,y) nicht als Implikation auffassen.

Häufig: $R(x,y) = \min(a, b)$ „Mamdani-Regler"

Also:

$K'(y) = \max \{ \min \{ ¾, K_n(y) \}, \min \{ ¼, K_v(y) \} \}$

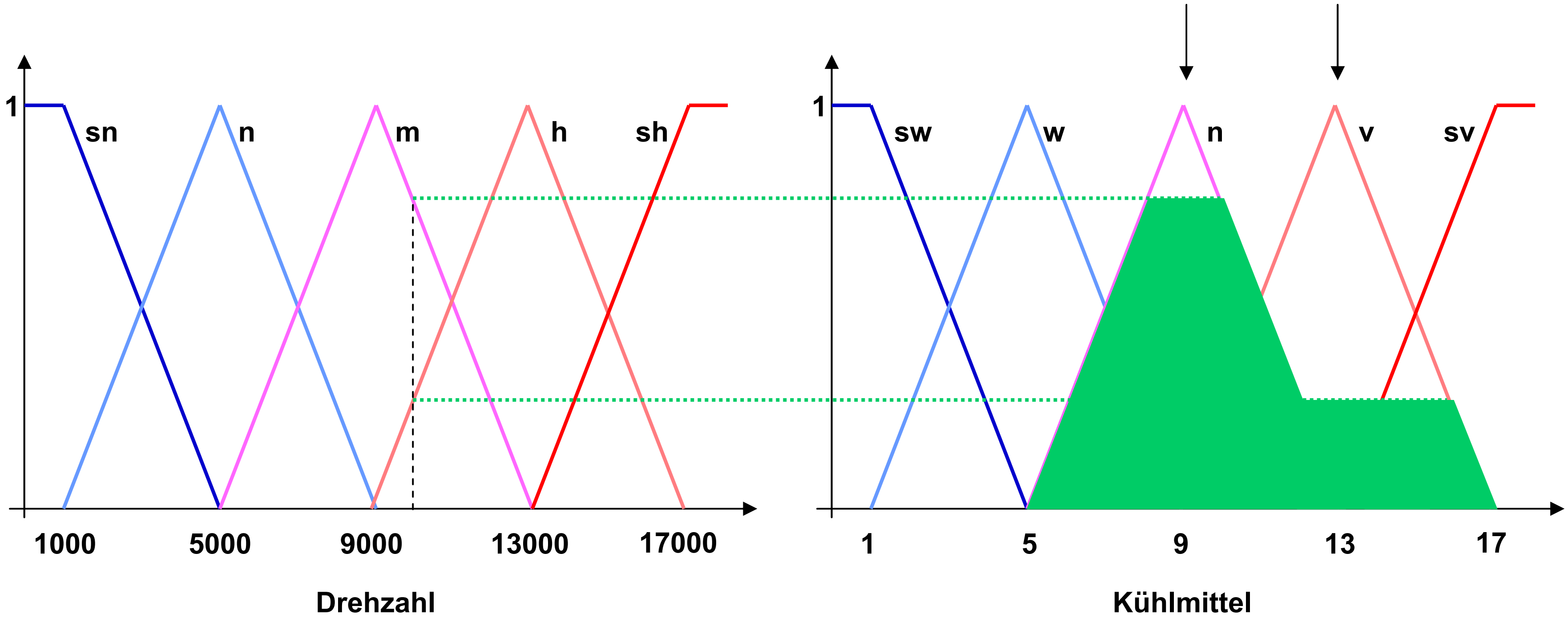
→ Graphische Illustration

Approximatives Schließen

Beispiel: (Fortsetzung)

Industrielle Bohrmaschine → Regelung der Kühlmittelzufuhr

$K'(y) = \max \{ \min \{ ¾, K_n(y) \}, \min \{ ¼, K_v(y) \} \}, x_0 = 10000$

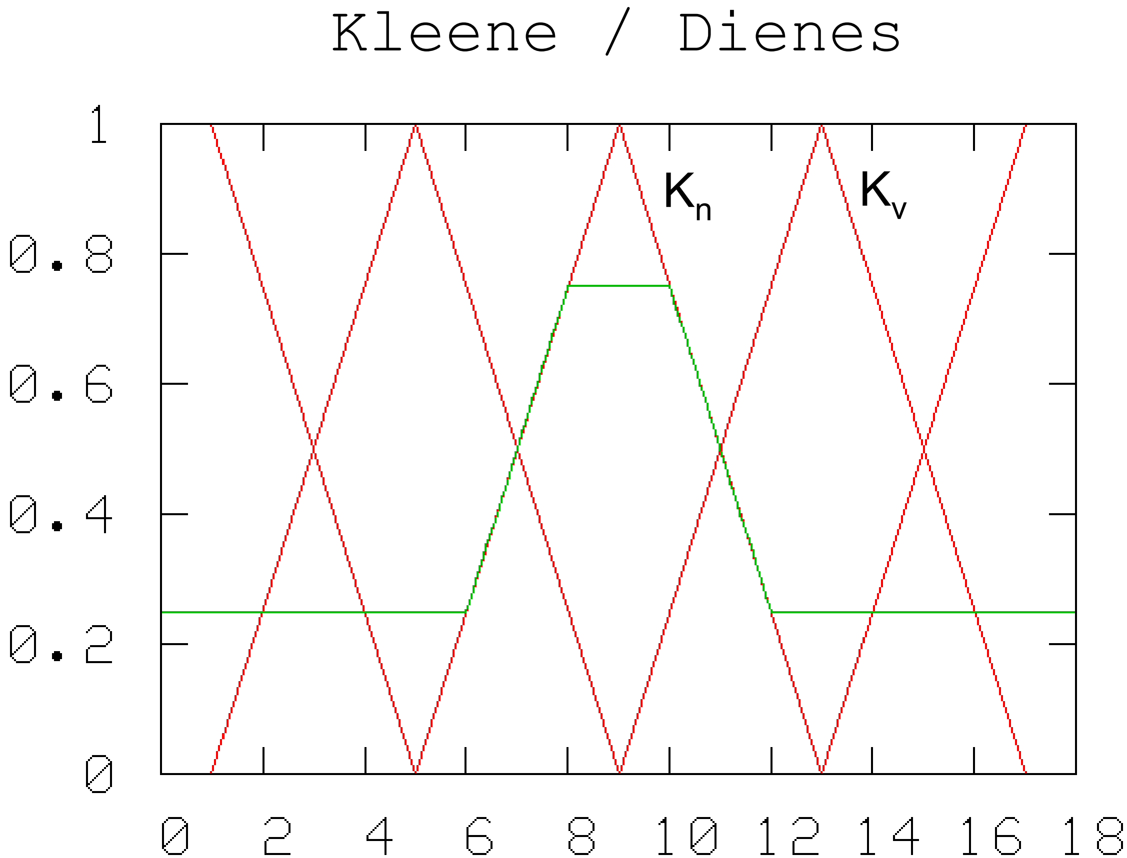


Was erhalten wir für K'(y) aus vorherigen Beispiel, **wenn**

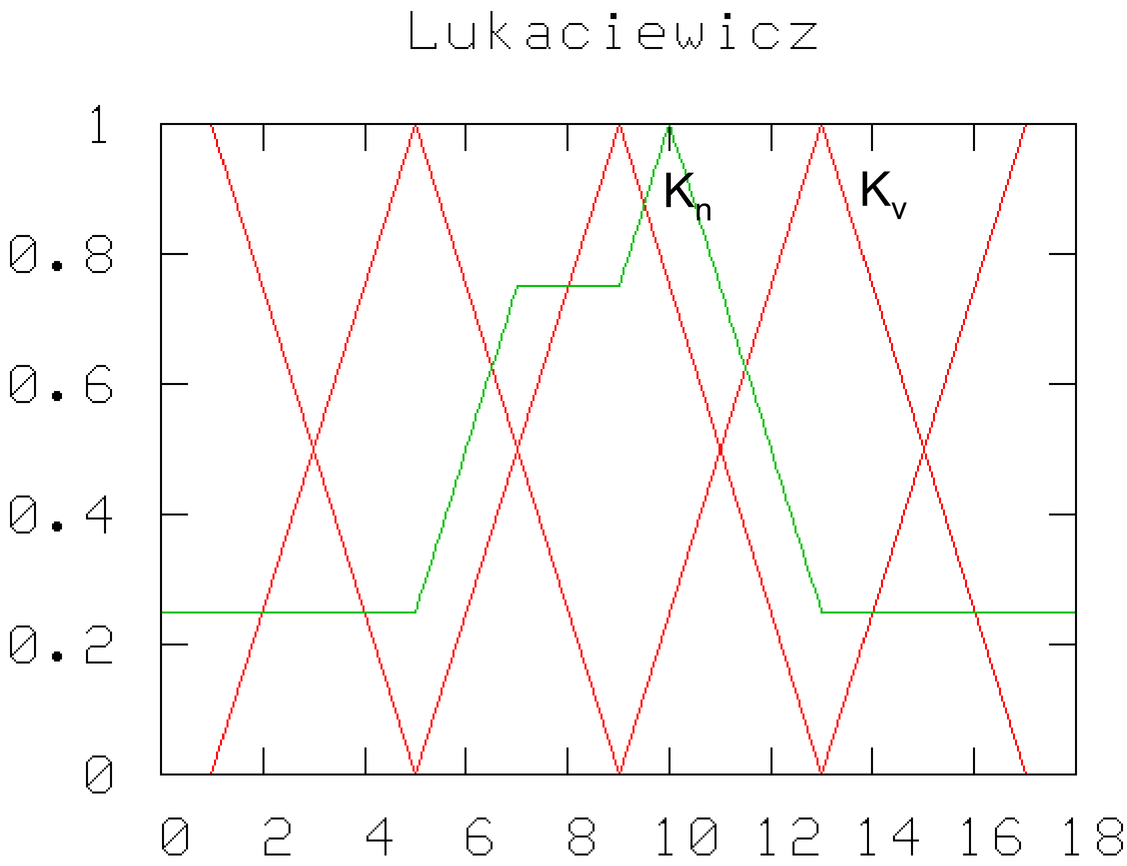
- Regeln logikbasiert interpretiert werden (min-Aggregation) und
- verschiedene Implikationsregeln verwendet werden?

Zur Erinnerung:

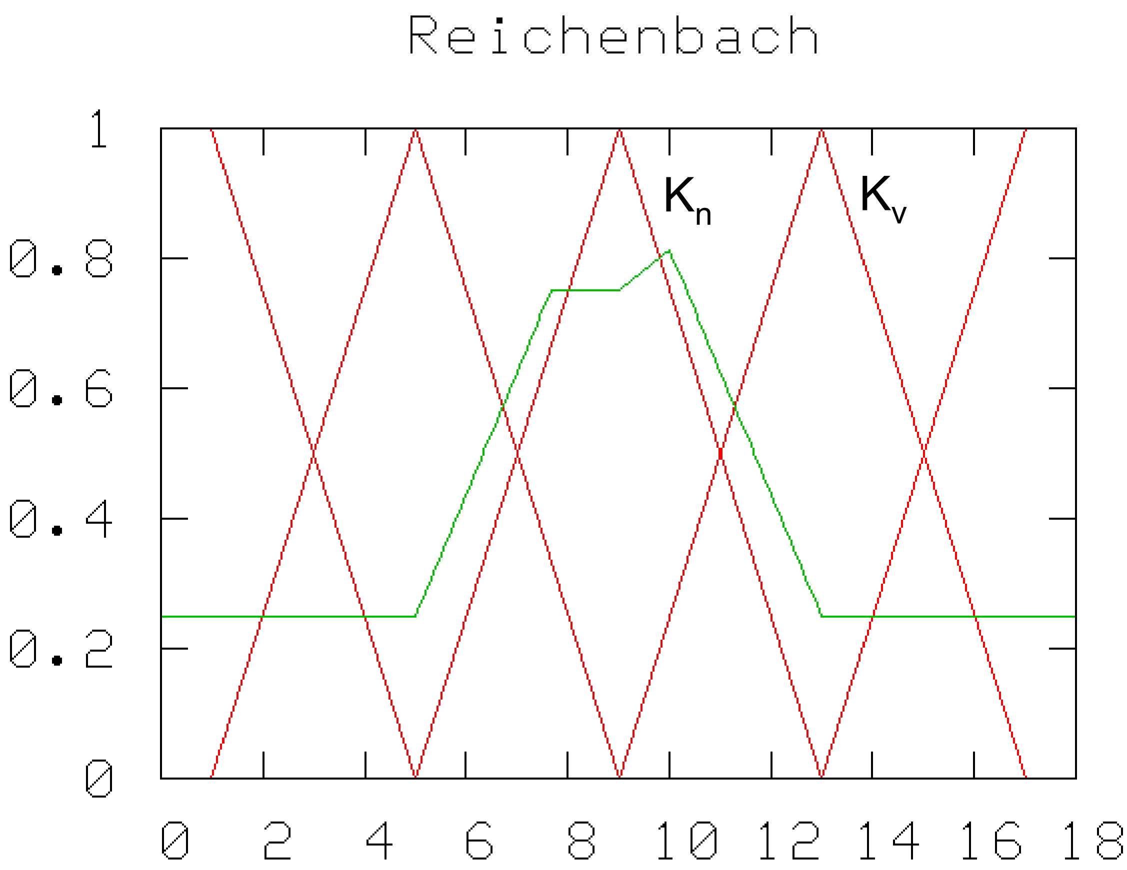
- Bohrmaschine benötigt Kühlmittelzufuhr.
- Bei x_0 = 10000 Umdrehungen/min. sollte K'(y) ermittelt werden.
- Zugehörigkeitsgrad zu Fuzzy-Mengen für Drehzahl x_0:
  mittel(x_0) = 0.75 und hoch(x_0) = 0.25, sonst = 0.



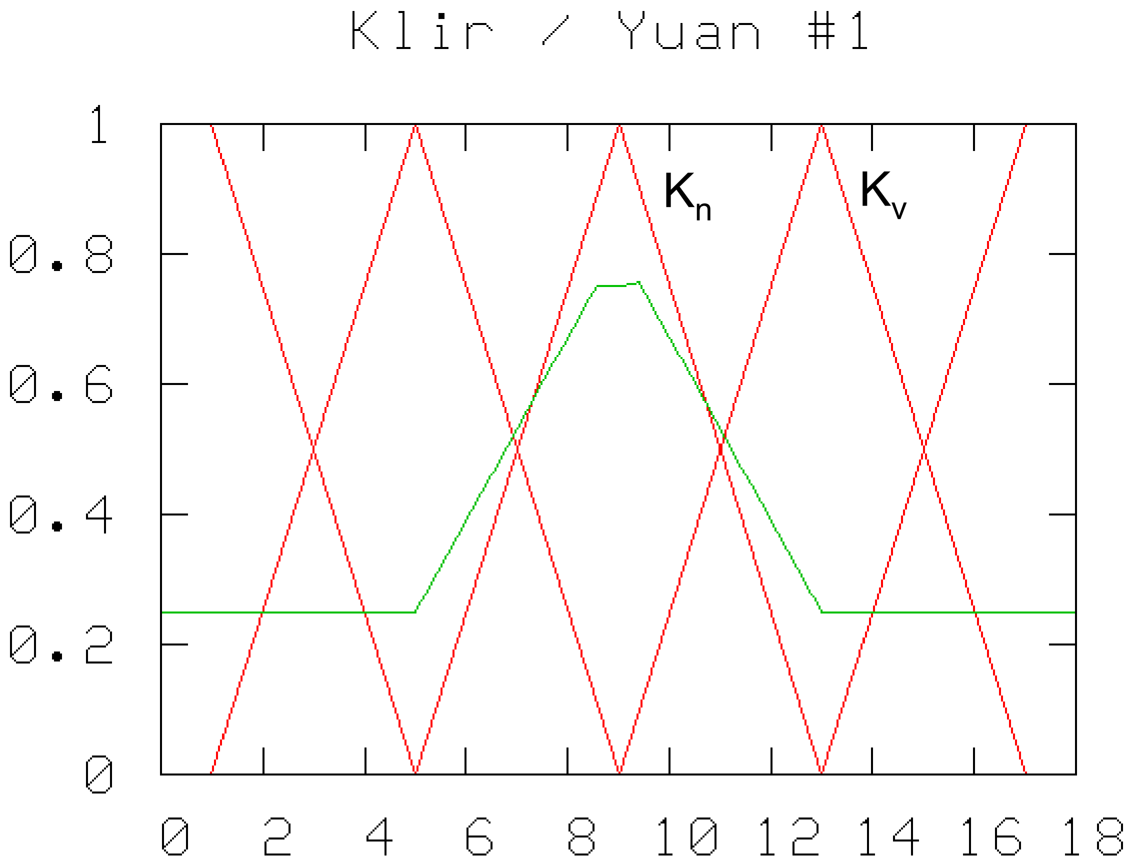
$$\mathrm{Imp}(a, b) = \max \{ 1 - a, b \}$$



$$\mathrm{Imp}(a, b) = \min \{ 1, 1 - a + b \}$$

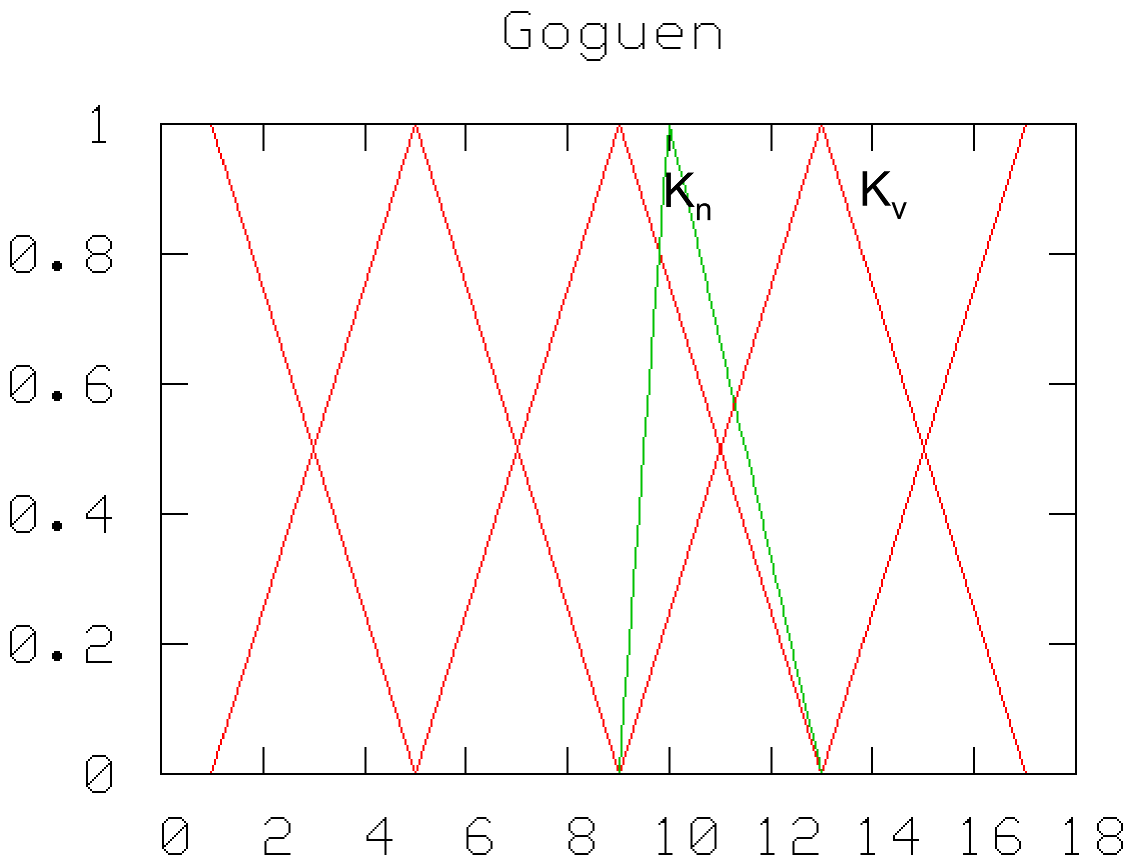


Imp(a, b) = 1 – a + ab

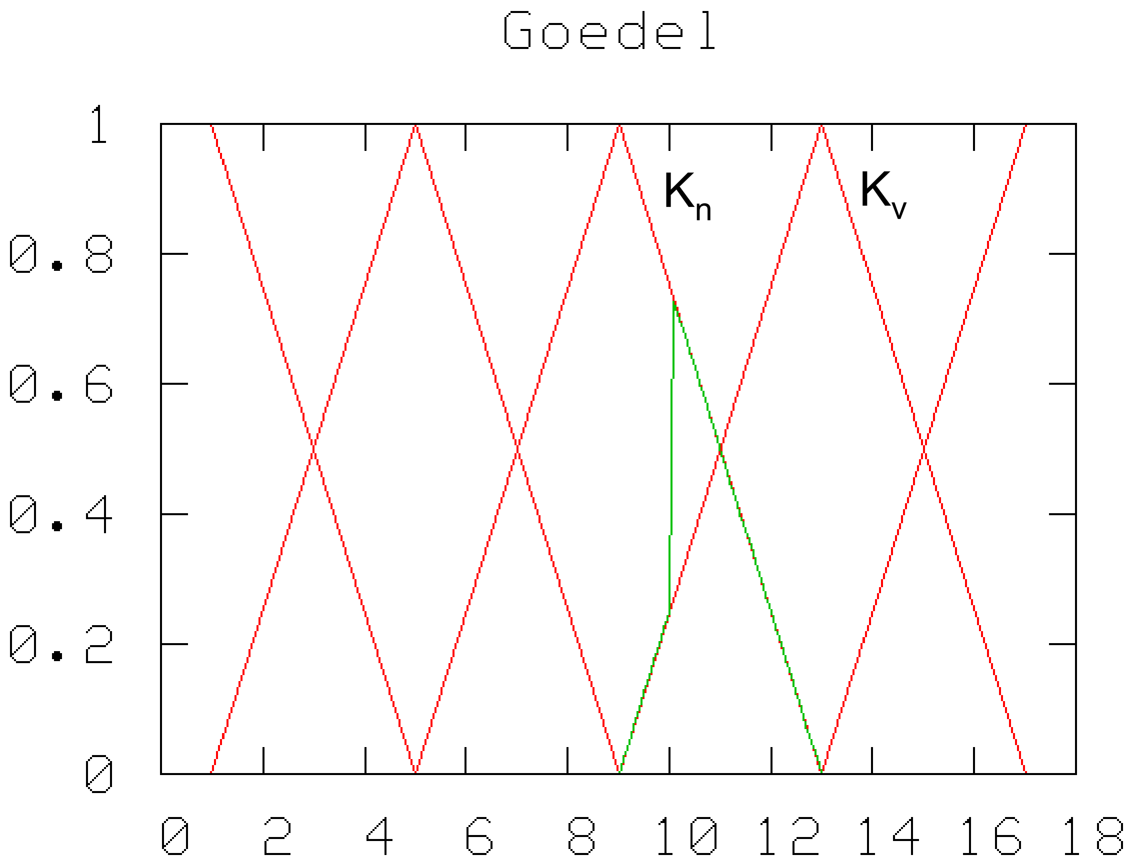


$$Imp(a, b) = 1 - a + a^2 b$$

Approximatives Schließen

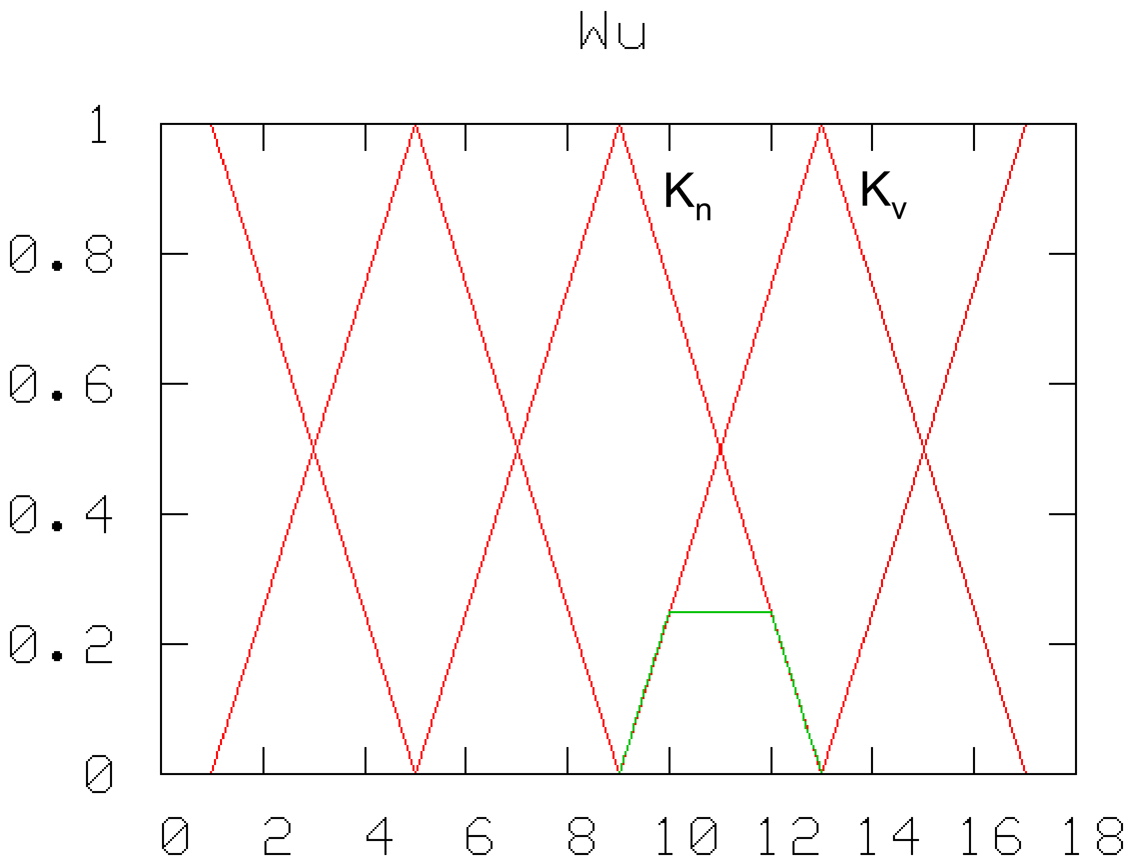


$$\mathrm{Imp}(a, b) = \begin{cases} 1 , & \text{falls } a \le b \\ b/a , & \text{falls } a > b \end{cases}$$



$$\mathrm{Imp}(a, b) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } a \leq b \\ b\,, & \text{falls } a > b \end{cases}$$

Approximatives Schließen



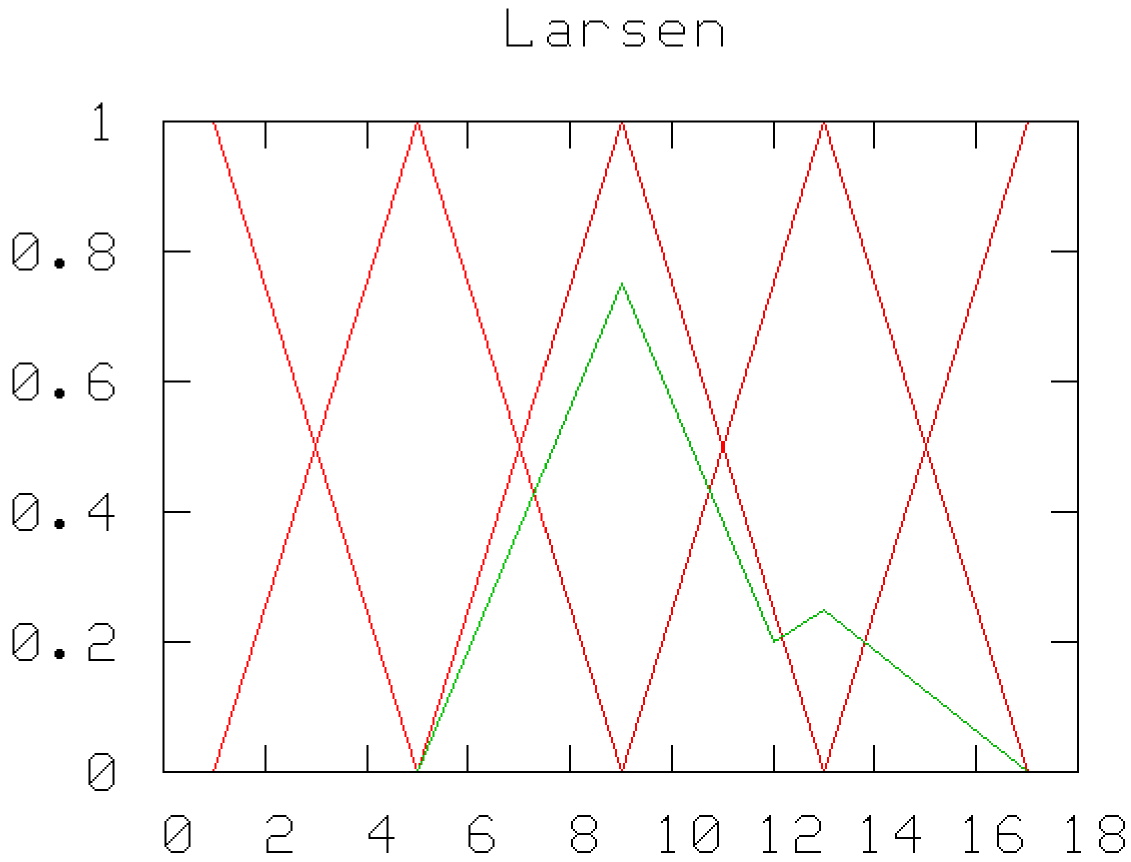
$$\text{Imp}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } a \leq b \\ \min\{1 - a, b\} & \text{, falls } a > b \end{cases}$$

Bemerkungen (zu den hier gezeigten Beispielen):

- Lukaciewicz-Implikation erfüllt alle 9 Axiome.
- Wu-Implikation ergibt beim Inferenzschritt für A'=A genau B'=B.
- Zugehörigkeitsgrad B'(y) = 0 nur mit Implikationen möglich, für die Imp(a, 0) = 0 für a > 0 gilt: z.B. Gödel, Goguen, Wu.

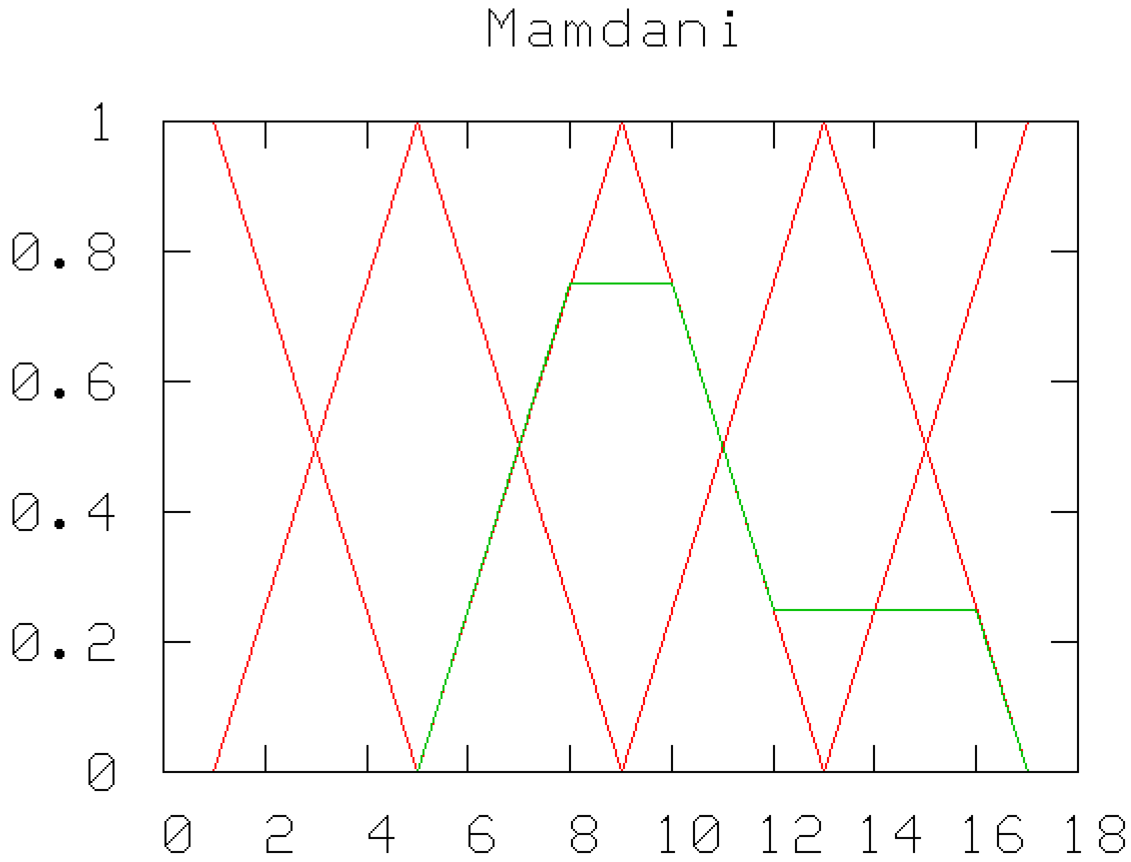
Was erhalten wir für B'(y) aus vorherigen Beispiel, **wenn**

- Regeln nicht logikbasiert interpretiert werden (max-Aggregation) und
- verschiedene Relationszusammenhänge verwendet werden?



$$R(x, y) = A(x) \cdot B(x)$$

Approximatives Schließen



$$R(x, y) = \min \{ A(x), B(x) \}$$

Approximatives Schließen