8. Integralrechnung

Kapitelgliederung

Definition 8.1 (Zerlegung)

Gegeben seien ein Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$ *und eine endliche Anzahl von Punkten* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *mit* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Dann heißt $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ *eine* ***Zerlegung*** *von* $[a, b]$ *und* $|Z| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ *das* ***Feinheitsmaß*** *der Zerlegung* Z.

Eine Zerlegung heißt ***äquidistant****, wenn die Intervalle* $[x_{i-1}, x_i]$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *alle gleich groß sind.*

Definition 8.2 (Unter- und Obersumme)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt $(\forall x \in [a, b]. |f(x)| \leq K < \infty)$ und Z eine Zerlegung auf $[a, b]$. Wir nennen

$$s(Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ die } \textbf{Untersumme} \text{ und}$$
$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ die } \textbf{Obersumme}$$

von f bezüglich der Zerlegung Z.

Definition 8.3 (Verfeinerung und Überlagerung)

Eine Zerlegung $\tilde{Z}$ wird eine ***Verfeinerung****von Zerlegung Z genannt (in Zeichen: $Z \leq \tilde{Z}$) wenn $\tilde{Z}$ alle Punkte von Z enthält.*

Eine Zerlegung $\hat{Z}$, die genau die Punkte von Z und $\tilde{Z}$ enthält, soll ***Überlagerung*** *von Z und $\tilde{Z}$ heißen und mit $\hat{Z} = Z + \tilde{Z}$ bezeichnet werden.*

Lemma 8.4

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Zerlegung $\tilde{Z}$ entstehe aus Z durch Hinzunahme eines zusätzlichen Punktes. Dann gilt:

a) $s(Z) \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) + 2K|Z|$

b) $S(Z) \geq S(\tilde{Z}) \geq S(Z) - 2K|Z|$

Lemma 8.4

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Zerlegung $\tilde{Z}$ entstehe aus Z durch Hinzunahme eines zusätzlichen Punktes. Dann gilt:

a) $s(Z) \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) + 2K|Z|$

b) $S(Z) \geq S(\tilde{Z}) \geq S(Z) - 2K|Z|$

Beweisidee

Abschätzung des zusätzlichen Flächeninhaltes bei der Teilung eines Intervalls. $\square$

Satz 8.5

Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.

Satz 8.5

Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.

Beweisidee

Seien Z und $\tilde{Z}$ zwei beliebige Zerlegungen. Dann gilt

$$s(Z) \underset{8.4}{\overset{\text{Lem.}}{\leq}} s(Z+\tilde{Z}) \underset{8.2}{\overset{\text{Def.}}{\leq}} S(Z+\tilde{Z}) \underset{8.4}{\overset{\text{Lem.}}{\leq}} S(\tilde{Z})$$

□

Definition 8.6 (Riemann-Integral)

Die Funktion $f(x)$ sei auf $[a, b]$ beschränkt. Man nennt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(Z) : Z \textit{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

*das **untere (Riemann-)Integral** und*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(Z) : Z \textit{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

*das **obere (Riemann-)Integral**.*

Definition 8.6 (Riemann-Integral (Fortsetzung))

Sind unteres und oberes Riemann-Integral gleich, dann heißt $f(x)$ über $[a, b]$ ***(Riemann-)integrierbar*** *und*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} s(Z) = \inf_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} S(Z)$$

heißt das ***(Riemann-)Integral*** *von f über $[a, b]$.*

Man nennt a (bzw. b) die ***untere*** *(bzw.* ***obere****)* ***Integrationsgrenze*** *und x die* ***Integrationsvariable****.*

Satz 8.7

Es gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *bzw.* $\sup\limits_Z s(Z) \leq \inf\limits_Z S(Z)$.

Satz 8.7

Es gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *bzw.* $\sup_Z s(Z) \leq \inf_Z S(Z)$.

Beweisidee

Für zwei beliebige Zerlegungen Z und $\tilde{Z}$ gilt nach Satz 8.5 stets $s(Z) \leq S(\tilde{Z})$.

Also gilt für ein beliebig fixiertes $\tilde{Z}$ auch $\sup_Z s(Z) \leq S(\tilde{Z})$.

Da $\tilde{Z}$ beliebig, kann es derart gewählt werden, dass $S(\tilde{Z}) = \inf_Z S(Z)$.

Folglich $\sup_Z s(Z) \leq \inf_Z S(Z)$. $\square$

Satz 8.8

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt und Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt

a) $\lim_{n\to\infty} s(Z_n) = \sup_Z s(Z)$ *und*

b) $\lim_{n\to\infty} S(Z_n) = \inf_Z S(Z)$

Satz 8.8

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt und Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty} s(Z_n) = \sup\limits_{Z} s(Z)$ *und*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} S(Z_n) = \inf\limits_{Z} S(Z)$

Beweisidee

Definition der passenden Zerlegung und Nutzung von Lemma 8.4 zur Bestimmung des Grenzwerts. □

Satz 8.9 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ beschränkt.

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 . \exists Z(\varepsilon) : S(Z) - s(Z) < \varepsilon$$

Satz 8.9 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt.

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0. \exists Z(\varepsilon) : S(Z) - s(Z) < \varepsilon$$

Beweisidee

$\Rightarrow$: wähle passende Zerlegungen, die um höchsten $\epsilon/2$ vom Supremum bzw. Infumum abweichen und zeige, dass dann $S(Z) - s(z) < \epsilon$.

$\Leftarrow$: da zu jedem ϵ eine passende Zerlegung existiert, kann der Grenzwert für $\epsilon \to 0$ betrachtet werden. $\square$

Satz 8.10 (Integrierbarkeit stetiger und monotoner Funktionen)

a) f *stetig auf* $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

b) f *auf* $[a, b]$ *monoton* $\Rightarrow f \in R[a, b]$.

Satz 8.10 (Integrierbarkeit stetiger und monotoner Funktionen)

a) *f stetig auf $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.*

b) *f auf $[a, b]$ monoton $\Rightarrow f \in R[a, b]$.*

Beweisidee

zu a) Herleitung aus der $\epsilon - \delta$ Definition für Stetigkeit unter Nutzung der gleichmäßigen Stetigkeit.
zu b) Nachweis, dass bei einer äquidistanten Zerlegung, die immer weiter verfeinert wird, die Differenz zwischen $S(Z_n)$ und $s(Z_n)$ gegen 0 konvergiert. $\square$

Definition 8.11 ((Riemannsche) Zwischensumme)

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt, $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$. Man nennt

$$\sigma(Z, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i)$$

die ***(Riemannsche) Zwischensumme*** *von f auf $[a, b]$.*

Lemma 8.12

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt. Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es Zwischenpunkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ mit

a) $s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq s(Z) + \varepsilon$ *und*

b) $S(Z) - \varepsilon \leq \sigma(Z, \hat{x}) \leq S(Z)$

Lemma 8.12

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt. Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es Zwischenpunkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ mit

a) $s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq s(Z) + \varepsilon$ *und*
b) $S(Z) - \varepsilon \leq \sigma(Z, \hat{x}) \leq S(Z)$

Beweisidee

Wähle jeweils Werte aus den Intervallen der Zerlegung, deren Funktionswerte sich um maximal $\epsilon/(b-a)$ vom Minimum bzw. Maximum unterscheiden $\square$

Satz 8.13

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt, Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ mit passenden Zwischenpunkten $\tilde{x}^{(n)}$. Es gilt

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \text{ Jede Riemansche Zwischensumme konvergiert}\,.$$

In diesem Fall sind alle Grenzwerte gleich und sie haben den Wert

$$\lim_{n \to \infty} \sigma\left(Z_n, \tilde{x}^{(n)}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =: I$$

Beweisidee zu Satz 8.13

$\Rightarrow$: da $s(Z_n)$ und $S(Z_n)$ konvergieren, kann das Sandwich-Theorem genutzt werden.

$\Leftarrow$: Konstruktion konvergenter Teilfolgen, die gegen das untere und obere Riemann-Integral konvergieren.
Da auch nach Voraussetzung die Mischung der beiden Folgen zwei konvergente Teilfolgen besitzt und selbst konvergiert, müssen Teilfolgen und Folge gegen den selben Grenzwert konvergieren .

Satz 8.14

Sind die Funktionen f und g auf $[a, b]$ integrierbar, so ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Satz 8.14

Sind die Funktionen f und g auf $[a, b]$ integrierbar, so ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

Beweisidee

Herleitung des Integrals über die Zwischensummen. $\square$

Satz 8.15

Seien f und g integrierbar auf $[a,b]$. Dann gilt:

a) $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $|f(x)|$ *sind integrierbar auf* $[a,b]$.

b) *Falls* $f \le g$ *für alle* $x \in [a,b]$, *dann* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Satz 8.15

Seien f und g integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

a) $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $|f(x)|$ *sind integrierbar auf* $[a, b]$.

b) *Falls* $f \leq g$ *für alle* $x \in [a, b]$, *dann* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Beweisidee

Herleitung jeweils aus der Darstellung der Integrale über Ober- und Untersummen (für a)) oder Zwischensummen (für b)). □

Satz 8.16 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f \in R[a,b]$ *und* $m \leq f(x) \leq M$ *für* $x \in [a,b]$. *Dann ist*

a) $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

b) *Ist* $f(x)$ *auf* $[a,b]$ *zudem stetig, dann existiert ein* $\tilde{x} \in (a,b)$ *mit*
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\tilde{x})$

Satz 8.16 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f \in R[a, b]$ *und* $m \leq f(x) \leq M$ *für* $x \in [a, b]$*. Dann ist*

a) $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

b) *Ist* $f(x)$ *auf* $[a, b]$ *zudem stetig, dann existiert ein* $\tilde{x} \in (a, b)$ *mit*
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\tilde{x})$

Beweisidee

Teil *a*) durch Intgeration der Ungleichung
Teil *b*) unter Nutzung des Zwischenwertsatzes (Korollar 4.19), um zu zeigen, dass jeder Wert zwischen m und M angenommen wird. □

Satz 8.17 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $p(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ und $p(x)$ sowie $f(x) \cdot p(x)$ integrierbar auf $[a, b]$.
Wenn $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$ ist, dann gilt

$$m \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b p(x) f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 8.17 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $p(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ und $p(x)$ sowie $f(x) \cdot p(x)$ integrierbar auf $[a, b]$.
Wenn $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$ ist, dann gilt

$$m \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b p(x) f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweisidee

Analog zu Satz 8.16. □

Satz 8.18

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt und $a < c < b$. Es gilt:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b]\ .$$

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Satz 8.18

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt und $a < c < b$. Es gilt:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b] \ .$$

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Beweisidee

Auswahl passender Zerlegungen für die Intervalle. □

Definition 8.19

Für $a < b$ *und* $f \in R[a, b]$ *wird* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *sowie* $\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *für* $c \in [a, b]$ *festgelegt.*

Satz 8.20

Sei $f \in R[a,b]$ *und* $[c,d] \subseteq [a,b]$. *Dann gilt*

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c)\ .$$

wobei $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ *ist.*

Satz 8.20

Sei $f \in R[a,b]$ *und* $[c,d] \subseteq [a,b]$. *Dann gilt*

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c)\ .$$

wobei $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ *ist.*

Beweisidee

Nutzung Satz 8.18 Teil 2. $\square$

8.2 Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Satz 8.21

Sei $f \in R[a, b]$ *eine stetige Funktion und* $c \in [a, b]$. *Für* $x \in [a, b]$ *sei dann*

$$F(x) = \int_c^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist stetig differenzierbar und es gilt* $F'(x) = f(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$.

Satz 8.21

Sei $f \in R[a, b]$ eine stetige Funktion und $c \in [a, b]$. Für $x \in [a, b]$ sei dann

$$F(x) = \int_c^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweisidee

Einsetzen der Definition der Ableitung und zeigen, dass der Grenzwert für $h \to 0$ gerade $f(x)$ ist. $\square$

Definition 8.22 (Stammfunktion)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ auf $[a, b]$ soll ***Stammfunktion*** *oder* ***unbestimmtes Integral*** *von $f(x)$ heißen. Wir schreiben dafür $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Satz 8.23 (Fundamentalsatz der Differnetial- und Integralrechnung)

Ist $F(x)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

und für $x, c \in [a, b]$ entsprechend

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Satz 8.23 (Fundamentalsatz der Differnetial- und Integralrechnung)

Ist $F(x)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

und für $x, c \in [a, b]$ entsprechend

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Beweisidee

Zeige, dass $H(x) = F(x) - G(x)$ eine Konstante für alle $x \in [a, b]$, woraus der Satz gefolgert werden kann. □

8.3 Die Technik des Integrierens

Notation

$$F(x)\Big|_a^b := \Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Satz 8.24 (Partielle Integration)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei auf* $[a, b]$ *stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Satz 8.24 (Partielle Integration)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a, b]$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

Beweisidee

Umkehrung der Produktregel der Differenziation. □

Satz 8.25 (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf $\langle a, b\rangle$ und g : stetig differenzierbar auf $\langle \alpha, \beta\rangle$, wobei $< a, b >:= [\min\{a, b\},\ \max\{a, b\}]$ *und*

- $g(\langle \alpha, \beta\rangle) \subseteq \langle a, b\rangle$ *sowie*
- $g(\alpha) = a, g(\beta) = b.$

Dann ist $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$

Satz 8.25 (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf $\langle a,b\rangle$ und g : stetig differenzierbar auf $\langle\alpha,\beta\rangle$, wobei $< a,b >:= [\min\{a,b\},\ \max\{a,b\}]$ *und*

- $g(\langle\alpha,\beta\rangle)\subseteq\langle a,b\rangle$ *sowie*
- $g(\alpha)=a, g(\beta)=b.$

Dann ist $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$

Beweisidee

Umkehrung der Kettenregel der Differenziation. □

Satz 8.26 (Nützliche Substitutionsregeln)

1. $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$ für $F'(x) = f(x)$.
2. $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x)$.
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$.

Satz 8.26 (Nützliche Substitutionsregeln)

1. $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$ für $F'(x) = f(x)$.
2. $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x)$.
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$.

Beweisidee

Ableiten der rechten Seiten. $\square$

Satz 8.27

Jede rationale Funktion ist elementar integrierbar.

8.4 Uneigentliche Integrale

Definition 8.28 (unbeschränkter Integrationsbereich)

Sei f auf $[a, \infty)$ erklärt und über jedes $[a, c]$ für $a < c < \infty$ integrierbar. Man legt fest:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to\infty} \int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Wenn der Grenzwert existiert, dann existiert das uneigentliche Integral und es wird ***konvergent*** *genannt (andernfalls* ***divergent****). Entsprechend definieren wir für ein Intervall $(-\infty, a]$*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_c^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definition 8.28 (Fortsetzung)

und für $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$, *wobei beide Integrale auf der rechten Seite existieren müssen.*

Definition 8.29 (Integration unbeschränkter Funktionen)

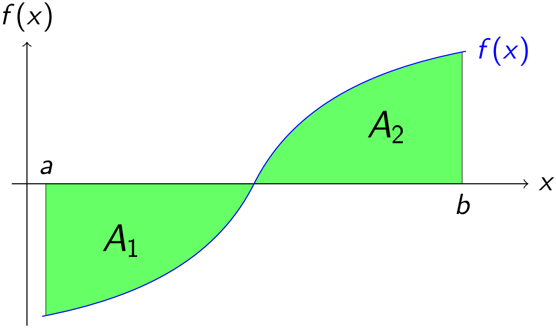
1. *Sei* $f \in R[c,b]$ *für jedes* c *mit* $a < c < b$ *und* $\lim\limits_{x \searrow a} |f(x)| = \infty$. *Man definiert* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *falls der Grenzwert existiert.*
2. *Sei* $f \in R[a,c]$ *für jedes* c *mit* $a < c < b$ *und* $\lim\limits_{x \nearrow b} |f(x)| = \infty$. *Man definiert* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, *falls der Grenzwert existiert.*
3. *Sei* $f \in R[c,d]$ *für alle* c, d *mit* $a < c < d < b$ *und* $\lim\limits_{x \searrow a} |f(x)| = \infty$ *sowie* $\lim\limits_{x \nearrow b} |f(x)| = \infty$. *Man definiert unter Rückführung auf die Fälle 1.) und 2.)* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $(a < c < b)$ *falls beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren.*

8.5 Anwendungen

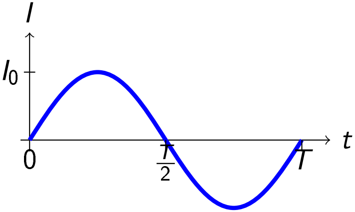
Wichtige Anwendungen der Integralrechnung:

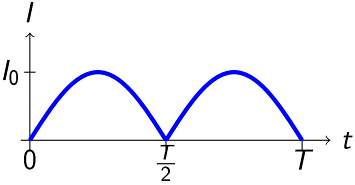
1. Summieren (Flächenberechnung)
2. Mitteln (Mittelwertsatz)
3. Rekonstruieren (von Funktionen aus der Änderungsrate)

Beispiel Summieren:



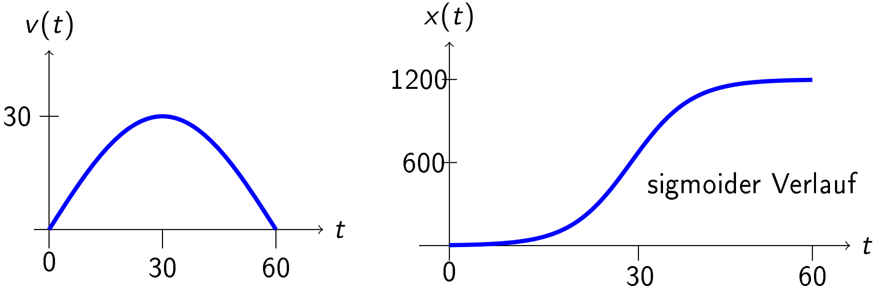
Beispiel Mitteln:





Wie groß ist der Mittelwert?

Beispiel Rekonstruieren:



Wie berechnet man aus der Geschwindigkeit die zurückgelegte Strecke?

8.6 Exkurs: Differentialgleichungen

Definition 8.30

Eine Gleichung der Form $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots) = 0$ heißt ***gewöhnliche Differentialgleichung*** *(DGL). Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung heißt die* ***Ordnung der DGL****.*

Lösung einer homogenen Differentialgleichung (Trennung der Variablen)

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{\mathrm{d}t} = a(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x(t)} = a(t) \cdot \mathrm{d}t$$

Beide Seiten integrieren

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s & \Leftrightarrow \quad \ln y\big|_{x_0}^{x} &= \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s & \Leftrightarrow \\ \ln \frac{x}{x_0} &= A(t) - A(t_0) & \Leftrightarrow \quad x(t) &= x_0 \cdot e^{A(t)-A(t_0)} \end{aligned}$$

Lösung des inhomogenen Systems (durch Variation der Konstanten)

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

Idee: in homogener Lösung Konstante x_0 zur Funktion $x_0(t)$ machen und behaupten, dass $\underbrace{x(t) = x_0(t) \cdot \varphi(t)}_{(*)}$ mit

$$\varphi(t) \stackrel{\varphi'(t)=a(t)\cdot\varphi(t)}{=} \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right) = e^{A(t)-A(t_0)}$$

Lösung nichtlinearer DGLs

$$x'(t) = a(t)g(x(t))$$

g ist stetig und nichtlinear

1. Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)g(x) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = a(t)\mathrm{d}t$$

   Integration auf beiden Seiten

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s =: F(t)$$

   $G(x)$ nach x auflösen (d.h. $x(t) = G^{-1}(F(t))$), falls möglich

Lösung nichtlinearer DGLs

$$x'(t) = a(t)g(x(t))$$

g ist stetig und nichtlinear

2. Numerische Lösung
   $x'(t) = f(t, x(t))$ ein Punkt in der Ebene (t, x).

   Anfangswert $t_0, x(t_0)$ bekannt, Steigung $f(t_0, x(t_0))$ bekannt

   Berechne (approximiere) $x(t_0 + h) \approx x(t_0) + f(t_0, x_0)$

   Erster Term der Taylor-Reihe (!)

Richtungsfeld und Isokline